II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
Київ, 26.11.2016
Можливі розв'язки

Зміст

7 клас 1
8 клас 3
9 клас 5
10 клас 8
11 клас 11

7 клас

1. На круглу трубу діаметром 2 см намотано 37 витків мідної дротини загальною довжиною витків 16 мм, щільно виток до витка. Визначте діаметр дроту та його об'єм. Відповідь надати в одиницях СІ.

Розв'язок. Визначаємо методом рядів діаметр дроту $d = \frac{16}{37} = 0{,}4324$ *мм*, потім обчислюємо площу поперечного перерізу $S = \pi \cdot r^2$, $S = 0{,}1468$ *мм²*. Знаючи діаметр труби знаходимо довжину одного витка $l = \pi \cdot d$, $l = 62{,}8$ *мм*, а потім довжину всього дроту $L = 37 \cdot 62{,}8$ *мм* $= 2323{,}6$ *мм*. Наближена відповідь $V = S \cdot L$, $V = 341{,}1$ *мм³* $= 0{,}3411$ *см³* $= 0{,}0000003411$ *м³*.

2. На виїзді з міста стоїть світлофор, який відкриває рух на 1 хвилину і потім закриває на 2 хвилини. Такий режим роботи світлофора призводить до того, що автомобілі виїжджають з міста групами. Оцініть, на якій відстані від міста (світлофора) зникає розподіл на групи автомобілів? Вважайте, що місто залишають автомобілі різних марок, швидкості яких лежать в діапазоні від 70 до 90 км/год.

Розв'язок. Розподіл на групи зникне, коли найшвидший автомобіль з другої групи наздожене найповільніший автомобіль з першої. За час $\tau = 2$ *хв* найповільніший автомобіль віддалиться на відстань $S_0 = \vartheta_1 \tau$, тоді «швидкому» буде потрібний час $t = \frac{S_0}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{\vartheta_1 \tau}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$, щоб його наздогнати. При цьому він пройде відстань

$$S_0 = \vartheta_2 t = \frac{\vartheta_1 \cdot \vartheta_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \tau \approx 10 \text{ км}.$$

3. Турист першу половину шляху проїхав на автомобілі в 10 раз швидше, а другу половину на екскурсійному електромобілі удвічі повільніше, ніж пішки. Чи зекономив час турист, проїхавши всю відстань, а не пройшовши її пішки?

Розв'язок. Обчислимо середню швидкість туриста під час руху:

$$\vartheta_c = \frac{2 \cdot l}{\frac{l}{10\vartheta_0} + \frac{l}{0{,}5\vartheta_0}} = \frac{2 \cdot 10\,\vartheta_0 \cdot 5\,\vartheta_0}{10\,\vartheta_0 + 0{,}5\,\vartheta_0} \approx 0{,}95\,\vartheta_0$$

Тому час руху туриста пішки менше, ніж їдучи.

4. Школярі поверталися з екскурсії на автобусі, який їхав зі швидкістю $\vartheta_1 = 70$ км/год. Пішов дощ, і водій зменшив швидкість до $\vartheta_2 = 60$ км/год. Коли дощ скінчився, до рідної школи залишалося проїхати $S = 40$ км. Автобус поїхав зі швидкістю $\vartheta_3 = 75$ км/год і в'їхав на подвір'я школи в точно запланований час. Скільки часу йшов дощ? Чому дорівнює середня швидкість автобуса? Вважайте, що автобуси в дорозі не зупинялися.

Розв'язок. Оскільки відстань від місця екскурсії до школи через дощ не змінилася, і час також не змінився, то середня швидкість збігається з початковою швидкістю $\upsilon_{ср} = 70$ км/год. Нехай дощ йшов протягом часу t. Тоді шлях, пройдений за цей час, склав $\upsilon_2 t$. Час, протягом якого після дощу учні проїхали відстань S, дорівнює S/υ_3. Зрозуміло, що інтервал часу від початку дощу до прибуття на місце, має дорівнювати інтервалу часу, протягом якого долали ту саму відстань з початковою швидкістю υ_1:

$$t + \frac{S}{\vartheta_3} = \frac{\vartheta_2 t + S}{\vartheta_1}$$

Звідси знаходимо:

$$t = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta_2}\left(\frac{S}{\vartheta_1} - \frac{S}{\vartheta_3}\right) = \frac{S\,(\vartheta_3 - \vartheta_1)}{\vartheta_3\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = 16 \text{ хв}$$

5. Хлопчик тримає горизонтально дошку довжиною 3 м за один кінець, другий кінець дошки лежить на циліндрі (рис. 7.1). Потім хлопчик штовхає дошку вперед, внаслідок чого циліндр без ковзання котиться вздовж горизонтальної поверхні теж без ковзання. За який час хлопчик досягне циліндра, якщо його швидкість 750 мм/с?

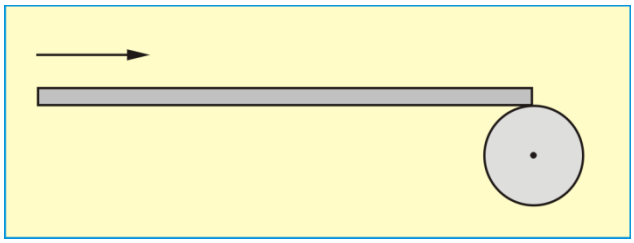

Рис. 7.1

Розв'язок. Час руху хлопчика та циліндра однакові. Але швидкість верхньої точки циліндра вдвічі більша за швидкість осі. Тому, коли хлопчик пройде шлях, рівний довжині дошки, циліндр прокотиться на $l/2$. Звідси виходить, що хлопчику до циліндра треба пройти шлях $2l$. Час $t = 2l/v$, $t = 8$ с.

8 клас

1. На виїзді з міста стоїть світлофор, який відкриває рух на 1 хвилину і потім закриває на 2 хвилини. Такий режим роботи світлофора призводить до того, що автомобілі виїжджають з міста групами. Оцініть, на якій відстані від міста (світлофора) зникає розподіл на групи автомобілів? Вважайте, що місто залишають автомобілі різних марок, швидкості яких лежать в діапазоні від 70 до 90 км/год.

Розв'язок. Розподіл на групи зникне, коли найшвидший автомобіль з другої групи наздожене найповільніший автомобіль з першої. За час $\tau = 2$ *хв* найповільніший автомобіль віддалиться на відстань $S_0 = \vartheta_1\tau$, тоді «швидкому» буде потрібний час $t = \frac{S_0}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{\vartheta_1\,\tau}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$, щоб його наздогнати. При цьому він пройде відстань $S_0 = \vartheta_2 t = \frac{\vartheta_1 \cdot \vartheta_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\,\tau \approx 10$ км.

2. Порожня пробірка занурена у воду на 2/3 свого об'єму. Після того, як до неї поклали дробинку масою 10 г, вона стала зануреною на ¾ свого об'єму. Визначити масу пробірки.

Розв'язок. Позначимо: ρ_0 – густина води, M – маса пробирки, m – маса дробинки, V – об'єм пробірки.
Умова плавання пробірки без дробинки:

$$M\,g = \rho_0\,\frac{2}{3}\,V\,g$$

Умова плавання пробірки з дробинкою:

$$(M + m)\,g = \rho_0\,\frac{3}{4}\,V\,g$$

Поділимо перше рівняння на друге та знайдемо:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{9}{8} \Rightarrow 9M = 8(M + m) \Rightarrow M = 8\ m = 80\ г.$$

3. В льодовику, який плаває в океані, пробурили колодязь глибиною 200 м. Яку мінімальну роботу необхідно виконати для підняття з колодязя проби води масою 0,5 кг? Густина льоду становить 0,9 густини води.

Розв'язок. Під час підйому води з колодязя виконується робота $A = mgh$, h – відстань від верхнього шару льодовика до рівня води в океані. Для знаходження h запишемо умову плавання льодовика $m \cdot g = gV\rho$, $m_л = \rho SH$ – маса льоду, $V = S\,(H\text{-}h)$ – об'єм частини льодовика, яка занурена. Звідси висота підйому проби води $h = (1 - \rho_л/\rho_в)\,H$. Робота $A = 100$ *Дж*.

4. *У посудині, з якої швидко відкачують повітря, міститься вода масою m при температурі 0 ^{0}C. Внаслідок інтенсивного випаровування вода поступово замерзає. Яка частина початкової маси води може перетворитися в лід? Питома теплота пароутворення води 2,3 МДж/кг , питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг.*

Розв'язок. Енергія, яка необхідна для утворення пари, виділяється під час кристалізації води. Нехай m_1 – маса льоду, який утворився, а m_2 – маса пари. За законом збереження енергії $\lambda\, m_1 = r\, m_2$, або $\lambda\, m_1 = r\,(m - m_1)$. Звідси $\frac{m_1}{m} = \frac{r}{r+\lambda}$. Відповідь: 87% води перетворилося в пару.

5. Куб складений з певної кількості добре припасованих один до одного кубиків однакового об'єму, виготовлених з різних порід дерева – корка (200 кг/м^3), дуба (700 кг/м^3), кедра (550 кг/м^3) і чорного дерева (1200 кг/м^3). Яка середня густина куба, якщо кількість кубиків з цих матеріалів узяті відповідно у відношенні 3:4:2:1?

Розв'язок. Середня густина куба дорівнює відношенню його маси M до об'єму V.

$M = 3n\, V_0 \rho_1 + 4n\, V_0 \rho_2 + 2n\, V_0 \rho_3 + n\, V_0 \rho_4$, $V = 10n\, V_0$.

Відповідь $\rho = 570$ кг/м^3.

9 клас

1. Маша та Ведмідь влаштували змагання сходинками в багатоповерховому домі. З'ясувалось, що Маша встигає три рази добігти до 4–го поверху та повернутися назад за час, поки Ведмідь піднімається на 16–й поверх. На який поверх встигне піднятися Маша, поки Ведмідь буде бігти з першого поверху на 6–й та назад? Вважайте, що Маша та Ведмідь бігають вгору–донизу з постійними за модулем швидкостями.

Розв'язок. Побудуємо графік залежності проходження поверхів учасниками змагання від часу. Час будемо відкладати в умовних одиницях. Вважаємо, що час, який витратила Маша на підйом і спуск дорівнює одиниці.

Для випадку, коли Ведмідь підніметься на 16 поверх, Маша встигне 3 рази добігти до четвертого поверху і повернутися назад. Аналогічно, побудуємо графік для другого випадку, коли Ведмідь підніметься на 6–й поверх і збіжить донизу, а Маша добіжить до N–го поверху (N – номер поверху, який шукаємо). Пам'ятаємо, що Маша та Ведмідь рухаються з постійними за модулем швидкостями (рис. 9.1).

Отримуємо поверх, який шукали – 13–й.

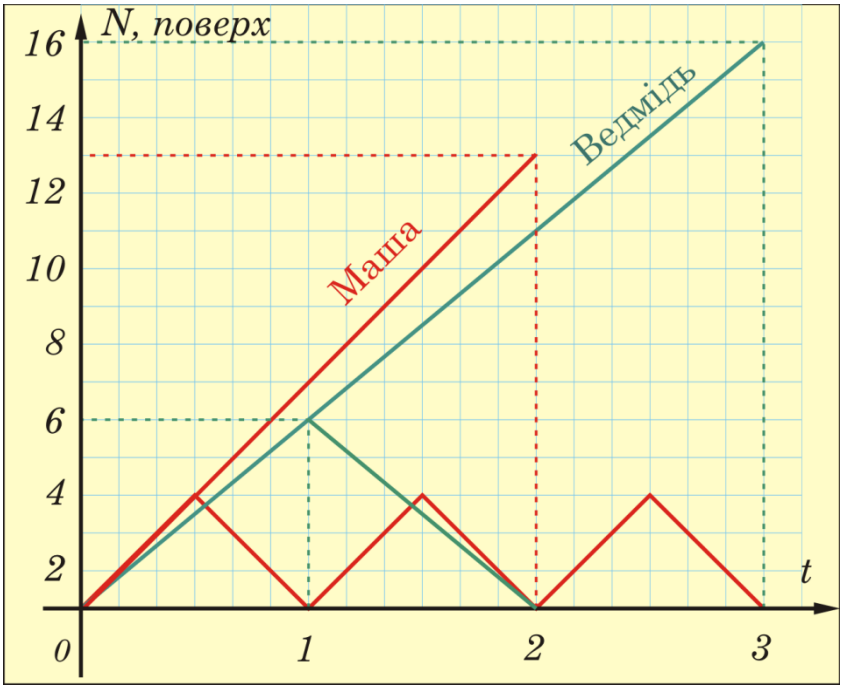

Рис. 9.1

2. *У посудині, з якої швидко відкачують повітря, міститься вода масою m при температурі 0 ^{0}C. Внаслідок інтенсивного випаровування вода поступово замерзає. Яка частина початкової маси води може перетворитися в лід? Питома теплота пароутворення води 2,3 МДж/кг , питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг.*

Розв'язок. Енергія, яка необхідна для утворення пари, виділяється під час кристалізації води. Нехай m_1 – маса льоду, який утворився, а m_2 – маса пари. За законом збереження енергії $\lambda\, m_1 = r\, m_2$, або $\lambda\, m_1 = r\,(m - m_1)$. Звідси $\frac{m_1}{m} = \frac{r}{r+\lambda}$. Відповідь 87% води перетворилося в пару.

3. В циліндрічній посудині з площею дна S за допомогою нитки утримується під водою шматочок льоду, всередині якого є повітряна порожнина (рис. 9.2). Об'єм льоду разом з порожниною дорівнює V, густина льоду $\rho_л$. Після того, як лід розтанув, рівень води в посудині зменшився на h. Знайдіть:

- *об'єм $V_п$ повітряної порожнини;*
- *силу T натягу нитки на початку досліду.*

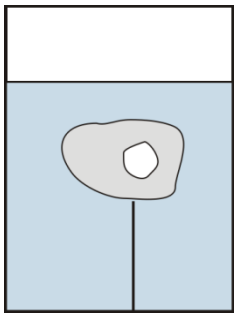

Рис. 9.2

Вважати, що густина води $\rho_в$ та прискорення вільного падіння g відомі.

Розв'язок. Припустимо, що об'єм льоду без урахування порожнини $V_л$. За умовою задачі $V = V_л + V_п$. Оскільки маса речовини не змінюється:

$$V_л\,\rho_л = V_в\,\rho_в$$

Після того, як лід розтане, об'єм, який він займав зменшився на

$$\Delta V = V_л - V_в = V_л\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right),$$

де $V_в$ – об'єм води, яка утворилася після танення льоду.
Рівень пониження води знайдемо з умови:

$$Sh = \Delta V + V_п = V_л\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right) + V_п.$$

Виразимо $V_п$ та отримаємо

$$V_п = Sh\,\frac{\rho_в}{\rho_л} - V\left(\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}\right).$$

Для визначення натягу нитки скористаємось II законом Ньютона:

$$T = F_A - \rho_л V_л g \quad (1)$$

За законом Архімеда $F_A = \rho_в V g$, об'єм льоду $V_л = V - V_п$. Підставляя знайдений раніше об'єм $V_п$ у формулу (1), отримаємо:

$$T = \rho_в\, g\, Sh$$

4. Піднімаючись рівномірно, як завжди, з вікна Малюка до себе на дах, Карлсон в той день, коли його пригостили варенням, витратив на підйом на 4 с більше, ніж зазвичай. Яка маса варення, яке він з'їв, якщо потужність "двигуна" Карлсона дорівнює 75 Вт, а висота підйому від вікна до даху дорівнює 10 м? Тертям у "двигуні" Карлсона та опором повітря знехтувати.

Розв'язок. Нехай m– маса "голодного" Карлсона; Δm – маса варення, яке він з'їв; h– висота підйому ($h = 10$ *м*); t – час підйому "голодного" Карлсона на висоту h; $\Delta t = 4$ *с* – додатковий час для підйому Карлсона, який з'їв Δm варення, на ту ж висоту; N – потужність "двигуна" Карлсона.

Оскільки за умовою завдання Карлсон піднімається рівномірно, то "підйомна" сила, що діє завдяки роботі "двигуна" Карлсона дорівнює силі тяжіння Карлсона. Якщо він піднімається "на порожній шлунок", то $N = \frac{mgh}{t}$ (1)

Коли Карлсон з'їв Δm варення, тоді $N = \frac{(\Delta m+m)gh}{t+\Delta t}$ (2)

$$\frac{mgh}{t} = \frac{(\Delta m+m)gh}{t+\Delta t}; \frac{(\Delta m+m)}{m} = \frac{t+\Delta t}{t}; \; 1+\frac{\Delta m}{m} = 1+\frac{\Delta t}{t} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta t}{t}, \text{оскільки } t = \frac{mgh}{N}, \qquad \text{тоді } \Delta m = \frac{m\Delta t}{t} = \frac{m\Delta t N}{mgh} = \frac{N\Delta t}{gh} = 3\text{кг}$$

5. Точкове джерело світла рухається із сталою швидкістю υ в площині, яка перпендикулярна до головної оптичної осі тонкої збиральної лінзи. Знайти швидкість, з якою рухається зображення джерела світла, якщо фокусна відстань лінзи F, а відстань під площини до лінзи дорівнює $4F$.

Розв'язок. Якщо джерело S рухається в площині, яка перпендикулярна до головної оптичної осі, то його зображення S_1 буде також рухатися в площині, яка перпендикулярна до цієї площини. Позначимо точки перетину цих площин з головною оптичною віссю A і B. За умовою задачі $AO = 4F$, звідки, скориставшись формулою тонкої лінзи, отримаємо:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{4F} + \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{F} - \frac{1}{4F} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{4}{3}F.$$

Знайдемо тепер швидкість руху точки S_1. Нехай за час t джерело світла переміститься в точку P ($SP = \upsilon t$), тоді зображення попадає в точку P_1. Оскільки трикутник SPO і S_1P_1O подібні, то:

$$\frac{S_1P_1}{SP} = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_1P_1 = \frac{1}{3}\vartheta t, \vartheta_1 = \frac{\vartheta}{3}$$

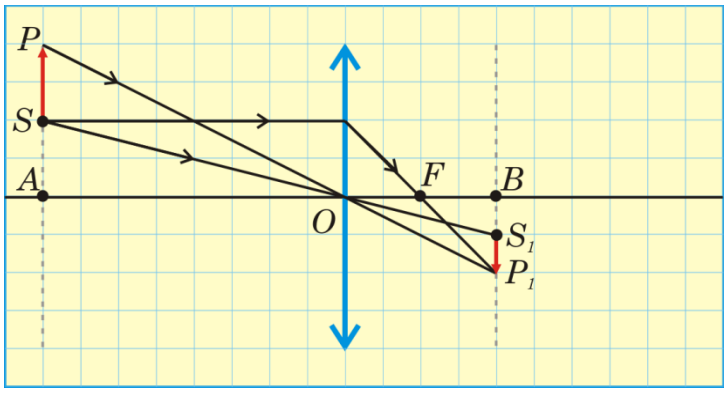

Рис. 9.3

10 клас

1. *Брусок масою 800 г штовхають вгору вздовж шорсткої похилої площини. Йому надають таку початкову швидкість, що він спочатку рухається вгору вздовж площини, а потім, у 2 рази довше за часом – вниз, і повертається у початкове положення. Визначте середню шляхову швидкість бруска за час руху, якщо у результаті виділилось 243 мДж теплоти.*

Розв'язок. Середня швидкість $\upsilon_c = \frac{2S}{3t}$, де S – переміщення бруска вздовж площини до зупинки, t – час його руху вгору. З закону збереження і перетворення механічної енергії випливає, що кількість теплоти, яка виділилась $Q = E_к - E_{ко}$, тому потрібно визначити кінетичні енергії бруска на початку руху та в кінцевій точці, після спуску. Пошук швидкостей та переміщення:

Під час руху вгору: $\upsilon_o = \alpha_1 t$, $S = \upsilon_o t - \frac{\alpha_1 t^2}{2} = \frac{\alpha_1 t^2}{2}$ (1)

Під час руху вниз: $\upsilon = \alpha_2 2t$, $S = \frac{\alpha_2 4t^2}{2}$ (2), прирівняємо (1) та (2) та після алгебраїчних перетворень маємо: $\alpha_1 = 4\alpha_2$, $\upsilon_o = 2\upsilon$, та $Q = \frac{3}{4}\frac{m\vartheta_0^2}{2}$, звідки можна виразити υ_o. Підставивши отримані вирази в (1), маємо: $\upsilon_c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8Q}{3m}} \approx 3\ м/с$.

2. *Два однакові поїзди рухаються залізницею, рейки якої прокладено вздовж екватора Землі, назустріч один одному. Маса кожного з них дорівнює 1000 т, швидкості поїздів однакові – 108 км/год. Встановити, який з поїздів діє на рейки з більшою силою, та визначити різницю цих сил. Як зміниться відповідь, якщо ці поїзди будуть рухатись вздовж паралелі на іншій географічній широті φ з тією самою швидкістю?*

Розв'язок. Під час руху вздовж екватора кожний поїзд має доцентрове прискорення, напрямлене вниз, яке надає йому рівнодійна сили тяжіння F та сили реакції рейок N. Тому вага кожного поїзда, яка за III законом Ньютона дорівнює силі N, після розгляду сил що діють на основі II закону Ньютона, знаходиться як $P = m\,(g - a)$. Доцентрове прискорення поїзда, який рухається в напрямку обертання Землі $a_1 = \frac{\vartheta_1^2}{R}$, де $\upsilon_1 = (\upsilon + \upsilon_з)$, іншого поїзда $a_2 = \frac{\vartheta_2^2}{R}$, де $\upsilon_2 = (\upsilon_з - \upsilon)$. Лінійна швидкість обертання точок екватора Землі $\upsilon_з = \frac{2\pi R}{T}$, де $T = 24\ год$ – період обертання Землі навколо осі. Різниця у вазі поїздів $\Delta P = P_2 - P_1 = m\,(a_1 - a_2)$. Після алгебраїчних перетворень маємо $\Delta P = \frac{4m\vartheta\vartheta_з}{R}$. Остаточно: $\Delta P = \frac{8\pi m\vartheta}{T} \approx 8727\ Н$.

З розв'язку видно, що з більшою силою діє на рейки поїзд, який рухається проти напрямку обертання Землі. Оскільки під час розв'язання задачі не враховуємо відцентрові сили інерції та сили Коріоліса, а визначаємо силу нормального тиску поїздів на

рейки, то ΔP залежить від маси поїздів, їх швидкості та періоду обертання Землі. Період обертання точок Землі для будь-якої географічної широти однаковий.

3. У калориметр помістили суміш води й льоду й рівномірно її нагрівають, тобто потужність нагрівника з часом не змінюється. Графік зміни температури в калориметрі від часу зображено на рисунку. Визначте початкове співвідношення мас води і льоду. Оцініть інтервал часу, через який температура знову почне змінюватись.

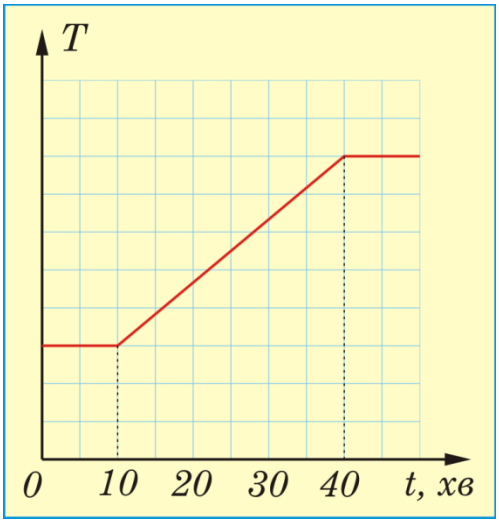

Рис. 10.1

Розв'язок. Нехай $t_1 = 10$ *хв*, $t_2 = 40$ *хв*, t_3 – час, коли температура знову почне змінюватись, $\Delta T = 100\ ^0C$. Якщо потужність нагрівника стала, тоді кількість теплоти, що йде на плавлення льоду $Q_{пл.} = m_л\,\lambda = P\,t_1$ *(1).*

Кількість теплоти, що йде на нагрівання води від *0* до *100* ^0C $Q_в = c\,(m_л + m_в)\,\Delta T = P\,(t_2 - t_1)$ *(2)* .

Кількість теплоти, що йде на випаровування води $Q = r\,(m_в + m_л) = P\,(t_3 - t_2)$ *(3).*

Поділивши (2) на (1), отримаємо: $\frac{m_в}{m_л} = \frac{\lambda\,(t_2 - t_1)}{t_1 c\,\Delta T} - 1 = 1{,}4$

Поділивши (3) на (2), отримаємо: $t_3 = t_2 + \frac{r\,(t2 - t1)}{c\,\Delta T} = 202$ *хв.*

4. Човен плаває у басейні довжиною 4 м та шириною 3 м. У човні лежить камінь масою 48 кг, густина якого 2000 кг/м³. Визначте, на скільки зміниться висота рівня води у басейні, якщо камінь викинути з човна на дно басейну? Поясніть, підвищиться чи знизиться рівень води? Густина води 1000 кг/м³.

Розв'язок. Застосуємо умову плавання тіл: у першому випадку $(m_1 + m_2)g = \rho_в V_1\,g$ (1), де m_1 –маса човна, m_2 – маса каменя, V_1 – об'єм витісненої води.

У другому випадку об'єм витісненої води $V_2 = V_3 + V_к$, де V_3 – об'єм води, яку витісняє човен, його можна визначити, так як $m_1\,g = \rho_в\,V_3\,g$ (2), а $V_к = \frac{m_2}{\rho_к}$. Тоді зміна об'єму води в басейні $\Delta\,V = V_1 - V_2 - V_к$. Виражаємо V_1 та V_2 з рівнянь (1) та (2).

Після алгебраїчних перетворень маємо: $\Delta V = m_2\,(\frac{1}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_к})$. Оскільки $\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{\Delta V}{ab}$, остаточна відповідь:

$$\Delta h = \frac{m_2}{ab}\left(\frac{1}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_к}\right) = 2\ мм.$$

Рівень води у басейні понизиться.

5. На рис.10.2 зображено електричне коло, яке містить ідеальний амперметр A, резистори опором R та 2R, вимикачі K_1 та K_2. Коло підключено до джерела постійної напруги U. Яку силу струму буде показувати амперметр при різних комбінаціях вимикачів K_1 та K_2 (замкнуто-розімкнуто)? Якими будуть напрямки струму на ділянці BD у різних випадках? У якому з цих випадків покази амперметра будуть найбільшими?

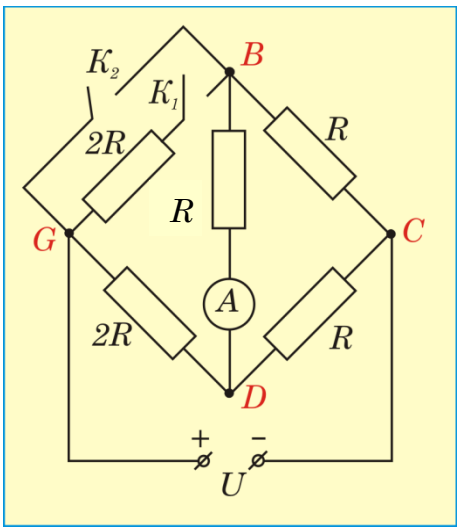

Рис. 10.2

Комбінація 1: ключ K_1 замкнутий, K_2 розімкнутий. У цьому випадку на ділянці *GB* ввімкнено резистор *2R*, схема симетрична відносно *GC*, тому $I_1 = 0$.

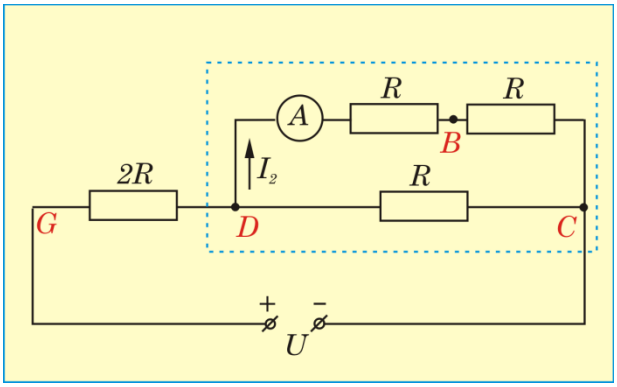

Рис. 10.3

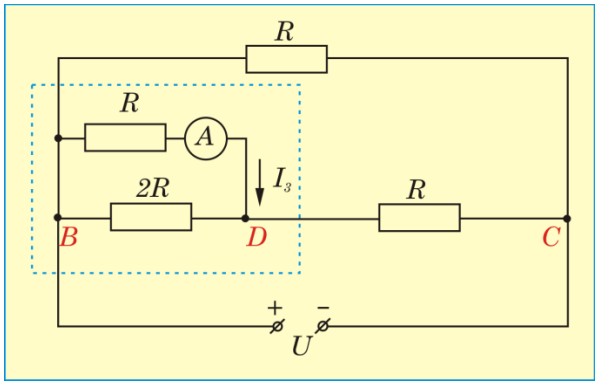

Рис. 10.4

Комбінація 2: ключі K_1 і K_2 розімкнуто. Еквівалентна схема зображена на рис. 10.3. Опір ділянки кола, яка обведена пунктирною лінією, знайдемо з умови: $1/r = 1/R + 1/2R = 3/2R$, звідки $r = 2R/3$. На ділянці *DC* напруга $U_{DC} = U\,r/(2R + r) = U/4$.
Покази амперметра $I_2 = U_{DC}/2R = U/8R$.
Напрям струму від вузла *D* до вузла *B*.
Комбінація 3: ключ K_2 замкнуто. Еквівалентна схема зображена на рис. 10.4. Опір ділянки кола, обведеної пунктирною лінією, знайдемо з умови: $r = 2R/3$. На ділянці *BD* напруга $U_{BD} = U\,r/(R + r) = 2U/5$.
Покази амперметра $I_3 = U_{BD}/R = 2U/5R$.
Напрям струму від вузла *B* до вузла *D*.
Також легко побачити, що $I_3 > I_2$.

11 клас

1. З яким прискоренням a_0 необхідно рухати вздовж горизонтальної поверхні клин з кутом при основі $\alpha = 30°$, щоб брусок масою m тиснув на клин із силою $mg/2$? Тертя між бруском та клином відсутнє.

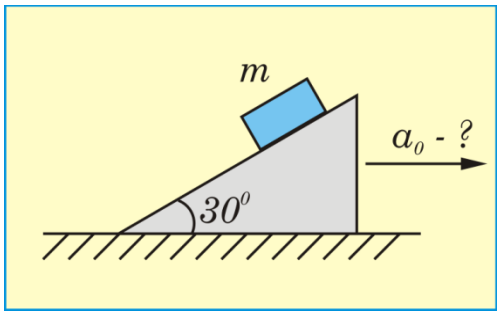

Рис. 11.1

Традиційний розв'язок. Запишемо II закон Ньютона для кубика в проекції на вісь *0x* та *0y* (рис. 11.2):

$$m\,a_x = N\sin\alpha; \quad -m\,a_y = N\cos\alpha - mg.$$

Під час руху клина з прискоренням a_0 загальне прискорення бруска визначається, як геометрична сума прискорень (див. трикутник прискорень на рис. 11.2).

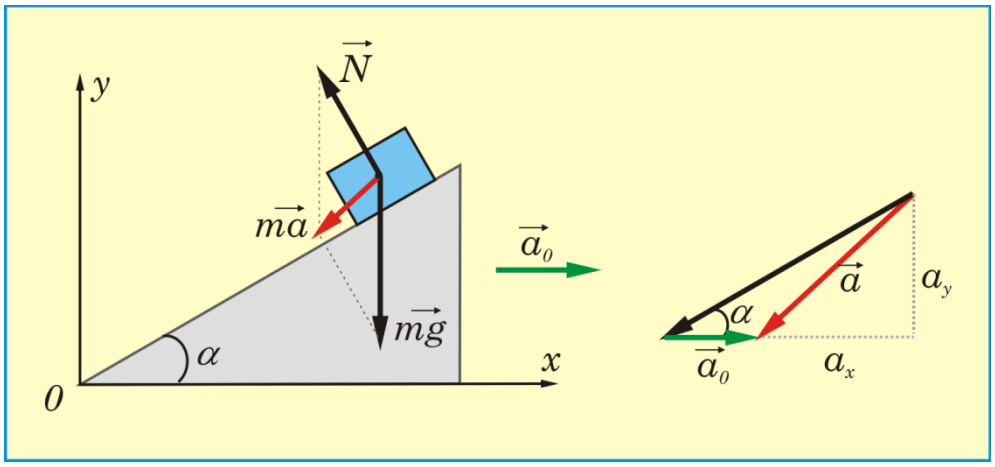

Рис. 11.2

Тоді: $tg\,\alpha = \frac{a_y}{a_0 + a_x}$; $\Rightarrow \frac{m\,g - N\cos\alpha}{m} = \left(\frac{N}{m}\sin\alpha + a_0\right) tg\,\alpha$; $\Rightarrow g - \frac{g}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{4} + a_0\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$a_0 = g\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Можливий розв'язок. Запишемо II закон Ньютона для кубика в проекції на вісь *0x*, яка перпендикулярна до похилої площини клина (g – прискорення вільного падіння):

$$m\,a_x = N - mg\cos\alpha.$$

Враховуючи кінематичний зв'язок, тобто, що кубик не відривається від клина під час руху, пов'яжемо проекцію прискорення кубика a_x з прискоренням клина a_0: $a_x = -a_0 \sin\alpha$.

Підставимо це співвідношення в перше рівняння та скориставшись тим, що при куті $\alpha = 30^0$ $N = mg/2$, знайдемо прискорення клина: $a_0 = g(\sqrt{3} - 1)$.

2. На світлині наведені шість положень кульки, які зафіксовані через рівні інтервали часу. За наведеною світлиною визначте, у скільки разів найбільша кінетична енергія кульки більша за найменшу.

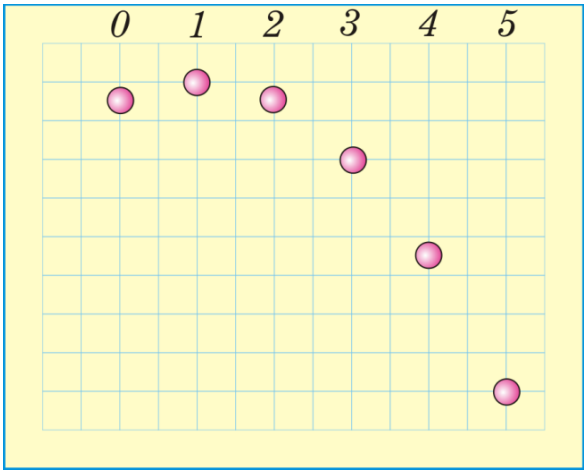

Рис. 11.2

Розв'язок. Найменша швидкість, а значить й кінетична енергія в найвищій точці *1*. Ця точка вища, бо знаходиться посередині між точками рівної висоти *0* і *2* (з симетрії траєкторії). Тоді $K_{min} = \frac{m\,\vartheta_x^2}{2}$. Найбільша енергія в нижчій точці 5, де $K_{max} = \frac{m\,\vartheta_x^2}{2} + \frac{m\,\vartheta_y^2}{2}$. Таким чином $\frac{K_{max}}{K_{min}} = 1 + \frac{\vartheta_y^2}{\vartheta_x^2}$. З кінематики $\vartheta_x = \frac{L}{t}$; $\vartheta_y = gt$, а $H = \frac{g\,t^2}{2}$, отже $\vartheta_y = \frac{2\,H}{t}$. Звідси: $\frac{\vartheta_y^2}{\vartheta_x^2} = \frac{4H^2}{L^2}$, а $\frac{K_{max}}{K_{min}} = 1 + \frac{4H^2}{L^2} = 5$.

3. Попередньо незаряджені конденсатори ємностями C_1 та C_2 підключили до однакових батарей, як вказано на схемі. Після встановлення рівноваги заряд другого конденсатора дорівнює q_0. Яким буде його заряд q після замикання ключа K?

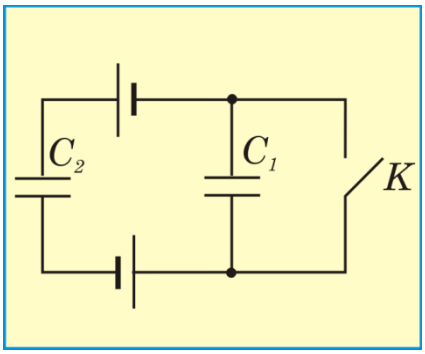

Рис. 11.3

Розв'язок. Із збереження сумарного заряду верхніх (чи нижніх пластин) випливає, що до ввімкнення заряди конденсаторів однакові. Оскільки сума напруг на конденсаторах дорівнює сумі напруг на батареях, то $qo\ (1/C_1 + 1/C_2) = 2U$. Після замикання ключа:

$q/C_2 = 2U$. Отже $q = qo\ (C_2/C_1 + 1)$.

4. Для визначення внутрішнього опору гальванічного елемента можна скористатися схемою, що наведена на рис. 11.4. Значення опору R підбирають таким чином, щоб гальванометр з заданим внутрішнім опором R_G давав однакове відхилення стрілки незалежно від того, в якому з двох положень A чи B знаходиться перемикач. Визначте внутрішній опір джерела r.

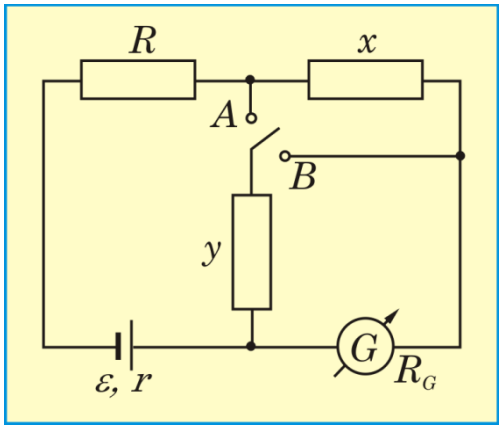

Рис. 11.4

Розв'язок. Відзначимо, що ситуація, яка описана в умові – однакові відхилення стрілки гальванометра – може бути реалізована при будь-яких значеннях опорів x і y. У випадку, коли ключ знаходиться в положенні B, маємо: $\frac{I_G}{I_y} = \frac{y}{R_G}$

Струм в нерозгаладженій частині кола визначається виразом:

$$I = I_G + I_y = I_G \left(1 + \frac{R_G}{y}\right)$$

На підставі закону Ома для повного кола маємо:

$$\varepsilon = I\,(r + R + x) + I_G\,R_G = I_G \left[\left(1 + \frac{R_G}{y}\right)(r + R + x) + R_G\right]. \quad (1)$$

У випадку, коли ключ знаходиться в положенні А: $\frac{I_G}{I'_y} = \frac{y}{R_G + x}$

Струм в нерозгалудженому колі дорівнює

$$I' = I_G + I'_y = I_G \left(1 + \frac{R_G + x}{y}\right).$$

За законом Ома для повного кола

$$\varepsilon = I'\,(r + R) + I_G\,(R_G + x) = I_G \left[\left(1 + \frac{R_G + x}{y}\right)(r + R) + R_G + x\right]. \quad (2)$$

Порівнюючи вирази (1) і (2), отримаємо після елементарних перетворень $r = R_G - R$.

5. До стелі нерухомого ліфту на пружині жорсткістю k підвішено вантаж масою m. В деякий момент ліфт починає рухатись вгору з прискоренням a. Який шлях здолає кабіна ліфту до моменту, коли пружина в перший раз видовжиться максимально?

Розв'язок. Пов'яжемо початок системи координат з нижнім кінцем недеформованої пружини; координатну вісь *Ox* направимо вертикально донизу. Коли кабіна нерухома, координата гирі в положенні рівноваги визначалась співвідношенням $x_0 = \frac{m\,g}{k}$. На початку руху кабіни стрибком зміщується донизу положення рівноваги гирі, координата якої в рівновазі стає рівною $x_1 = \frac{m\,(g+a)}{k}$. В результаті починаються гармонійні коливання гирі з періодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Графік залежності координати гирі x від часу t зображений на рис. 11.5. Початку відліку часу ($t = 0$) відповідає момент початку руху кабіни. Як видно з рисунка, час τ, за який довжина пружини в перший раз досягає максимального значення, дорівнює половині періоду коливань гирі: $\tau = \frac{T}{2}$. Шлях, який здолає кабіна за цей час, $S = \frac{a\tau^2}{2}$. Об'єднавши вирази, маємо відповідь: $S = \frac{\pi^2 am}{2k}$

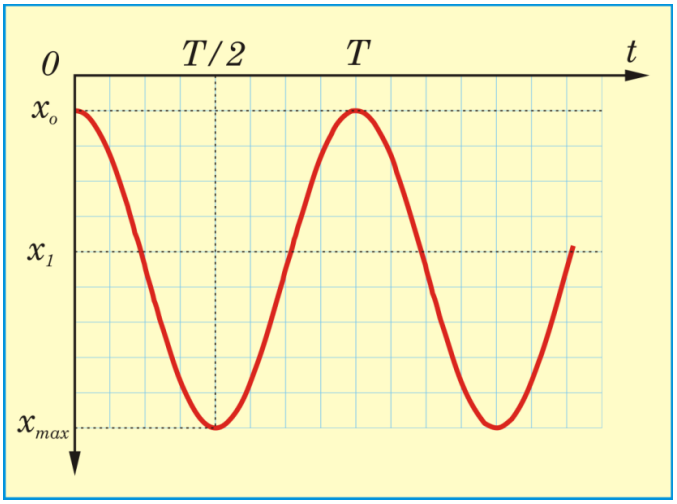

Рис. 11.5