

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики

Київ, 05.02.2017

Можливі розв'язки

8 клас

1. Ведмідь з постійною швидкістю рухається до озера. Маша щоразу згадує, що він щось залишив вдома і біжить за Ведмедем. Наздогнавши його, з тією самою швидкістю повертається додому. Перший раз Маша пододала відстань «дім-Ведмідь-дім» за час $T_1 = 4$ хв. Другий раз відстань «дім-Ведмідь-дім» вона пробігла за $T_2 = 6$ хв. За який час Маша пробіжить цю відстань в третій раз? Відомо, що біля Ведмедя та вдома Маша не затримується і до озера лише одна стежка.

Розв'язки.

Аналітичний. Від моменту першої зустрічі Маші і Ведмедя до моменту другої пройшов час $\frac{T_1 + T_2}{2}$. Відстань від дому до місця першої зустрічі дорівнює $AB = v_M \frac{T_1}{2}$, до місця другої зустрічі $AC = v_M \frac{T_2}{2}$. Переміщення Ведмедя (BC) можна виразити двома способами:

$$BC = v_B \frac{T_1 + T_2}{2} \text{ і } BC = v_M \frac{T_2 - T_1}{2} \Rightarrow v_B \frac{T_1 + T_2}{2} = v_M \frac{T_2 - T_1}{2}; \frac{T_2}{T_1} = \frac{v_B + v_M}{v_M - v_B}$$

Під час третього «циклу», отримаємо аналогічне співвідношення

$$v_B \frac{T_2 + T_3}{2} = v_M \frac{T_3 - T_2}{2}; \frac{T_3}{T_2} = \frac{v_B + v_M}{v_M - v_B} T_3 = \frac{T_2^2}{T_1} = 9 \text{ хв}$$

Графічний. Побудуємо графіки руху $x = x(t)$ Маші та Ведмедя (рис. 8.1).

Відомо, що Маша рухалась з постійною за модулем швидкістю до Ведмедя та назад.

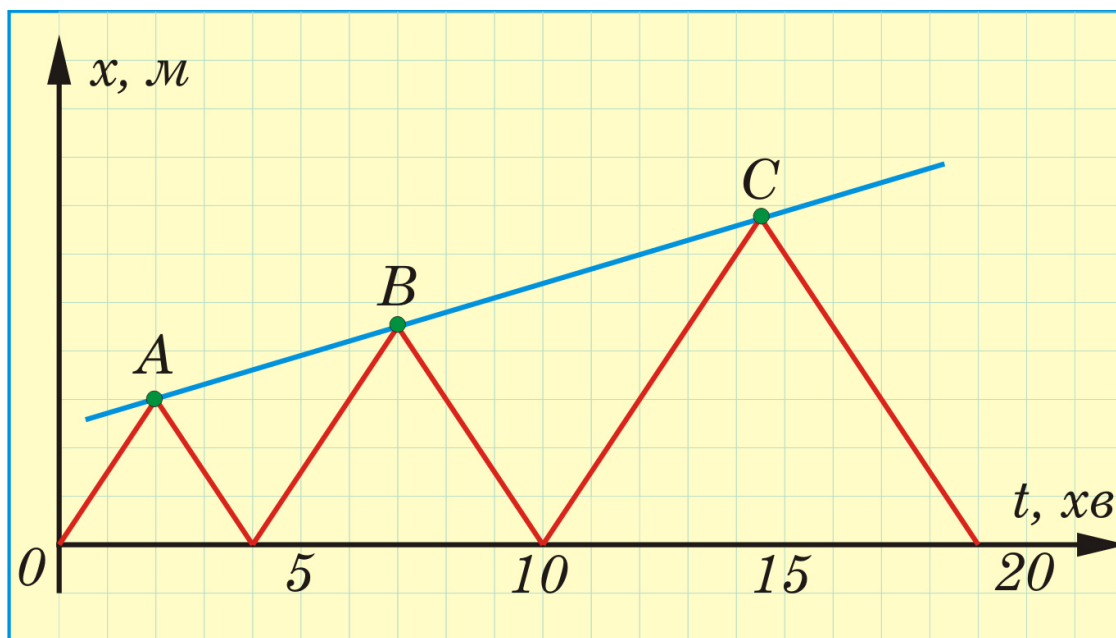


Рис. 8.1

Отже, графік її руху під час першого й другого циклів будуть представляти відрізки з однаковим кутом нахилу до осі часу. Основи «умовних» трикутників відповідно дорівнюють 4 й 6 хв. В точках A і B Маша наздоганяла Ведмедя. Отже, ці точки визнача-

ють графік руху Ведмедя (швидкість Ведмедя стала, графіком є пряма лінія). Щоб розв'язати задачу побудуємо графік руху Маші під час третього циклу і визначимо час її руху. $T_3 = 9 \text{ хв}$.

2. На протилежних кінцях легких терезів з різними плечами сидять Муха-Цокотуха і Комар. У точці O (рис. 8.2) знаходиться Павук. Відомо, що маса Павука вдвічі більша за масу Мухи, і в 4 рази більша за масу Комара. Спочатку терези перебували у рівновазі в горизонтальному положенні. Потім Муха і Комар починають рухатися назустріч один до одного з однаковими швидкостями v . З якою швидкістю і в якому напрямку має рухатися Павук, щоб терези залишалися горизонтальними?

Розв'язок. Нехай маса Комара m , тоді маса Мухи $2m$, а Павука $4m$. Позначимо довжини плечей терезів, на яких сидять Муха і Комар за l і L , відповідно. Запишемо умо-



Рис. 8.2

ву рівноваги в початковий момент часу:

$$2 m g l = m g L$$

де g – прискорення вільного падіння. Тоді $2 l = L$.

Через час t після того, як Муха та Комар почнуть рухатися, сума моментів сил, що діють на ваги відносно точки опори, буде дорівнювати

$$N = m g (2l - vt) - 2m g (l - vt)$$

Щоб терези залишалися горизонтальними, Павук теж повинен почати рухатися зі швидкістю v_n , в бік Мухи. Тоді умова рівноваги переписеться у вигляді: $m g (2l - vt) = 2 m g (l - vt) + 4 m g v_n t$.

Знайдемо звідси швидкість павука: $v_n = v/4$, в бік Мухи

3. Юний фізик прочитав в книзі «Поради домогосподарці» таку замітку: «Для того, щоб розсортувати курячі яйця за ступенем свіжості, візьміть чотири скляні банки, налийте в кожену півлітра води та розчиніть в першій банці 50 г солі, в другій – 45 г, в третій – 30 г і в четвертій – 15 г. Після цього по черзі занурюйте яйця в кожену банку. У першій банці будуть тонуть щойно знесені яйця, в другій – знесені не більше двох тижнів тому, в третій – знесені не більше п'яти тижнів тому, в четвертій – знесені не більше восьми тижнів тому». Школяр зробив розчини, строго за рецептом, розсортував яйця, що були в холодильнику, а потім злив розчини з усіх чотирьох банок в одну велику посудину. Скільки тижнів тому знесені яйця, які тонуть в такому розчині?

Побудуємо графік, уздовж горизонтальної осі відкладемо ступінь свіжості яєць (в тижнях), а вздовж вертикальної концентрацію солі в розчині (в грамах на 0,5 літра води). На графіку є лінійна ділянка, яка свідчить про те, що в період з двох до восьми тижнів густина яєць рівномірно зменшується з часом.

Знайдемо концентрацію солі в розчині, який отримали після зливання розчинів всіх чотирьох банок в одну велику посудину. Ця ємність містить $4 \cdot 0,5 \text{ л} = 2 \text{ л}$ води і $50 \text{ г} +$

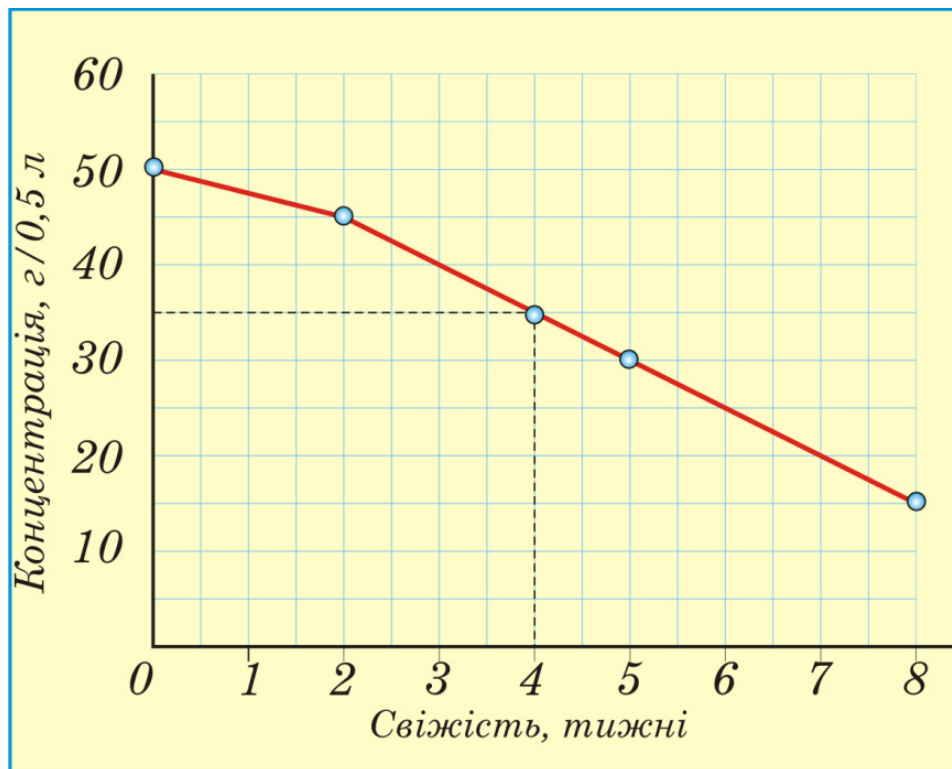


Рис. 8.3

$45 \text{ г} + 30 \text{ г} + 15 \text{ г} = 140 \text{ г}$ солі. Отже, концентрація солі в розчині, який отримали дорівнює $\frac{140}{4} \text{ г} = 35 \text{ г}$ на $0,5$ літра. З графіка видно, що точка графіку, яка відповідає цій концентрації, лежить на лінійній ділянці графіка. Це дає можливість, за допомогою графіку, визначити свіжість яєць, які тонуть в отриманому розчині – вони знесені не більше 4 тижнів тому.

4. На горизонтальне дно посудини поклали дерев'яний брусок. На рисунку показаний його перетин, всі кути прямі. Коли рівень води піднявся до середини висоти бруска, він відірвався від дна. Знайдіть густину матеріалу бруска, якщо густина води 1 г/см^3 .

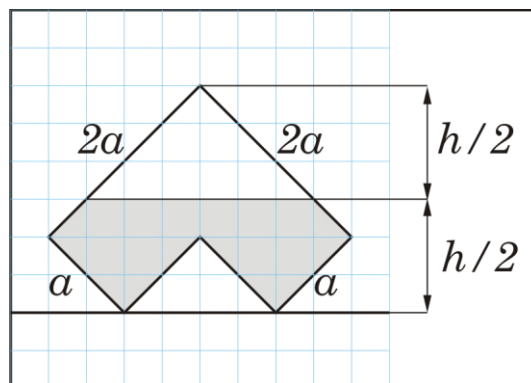


Рис. 8.4

Розв'язок. З закону Архімеда випливає умова відриву бруска – маса бруска має дорівнювати масі води, яка виштовхується. $\rho \cdot V_{\text{в}} = \rho \cdot V$, де V – об'єм бруска, $V_{\text{в}}$ – об'єм частини, яка занурена у воду.

Відношення цих об'ємів дорівнює відношенню площ в перетині бруска: $\frac{V_{\text{в}}}{V} = \frac{S_{\text{в}}}{S}$

$S = 3a^2$. Площу S_6 , яка занурена у воду, знайдемо з простих геометричних міркувань (рис. 8.5): $S_6 = 2a^2 - 2S_1 + S_1$, $S_6 = \frac{15}{8} a^2$.

Звідки $\rho = \rho_0 \frac{V_B}{V} = \rho_0 \frac{S_B}{S} = \frac{5}{8} = 0,625 \text{ г/см}^3$.

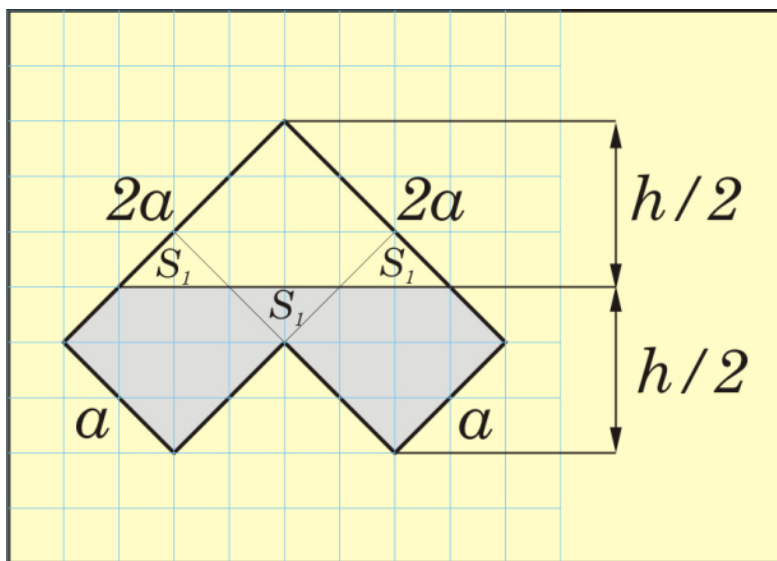


Рис. 8.5

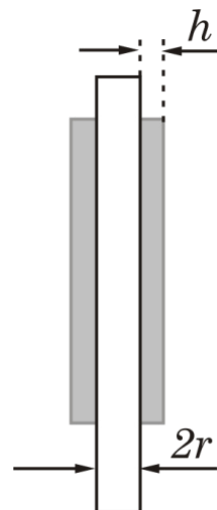


Рис. 8.6

5. Паличка «Бенгальського вогню» являє собою тонкий стержень радіусом $r = 1,0$ мм, який погано проводить тепло, вкритий шаром горючої речовини товщиною $h = 1,0$ мм (рис. 8.6). Під час її горіння стержень розігрівається до температури $t_x = 900$ °С. Якою може бути максимальна товщина шару горючої речовини, щоб стержень не почав плавитися, якщо температура плавлення матеріалу стержня $t_2 = 1580$ °С? Вважайте, що частка втрат теплоти в обох випадках однакова.

Розв'язок. При тонкому шарі горючої речовини рівняння теплового балансу має вигляд $\eta q m_1 = c m_2 (t_1 - t_0)$, де m_1 – маса горючої речовини, q – його питома теплота згорання, c – питома теплоємність матеріалу стержня, m_2 – маса тієї частини стержня, яка вкрита горючою речовиною і нагрівається під час її горіння, η – частка теплоти, що пішла на нагрівання стержня, t_0 – його початкова (кімнатна) температура.

Рівняння теплового балансу при товстому шарі горючої речовини матиме вигляд: $\eta q m_x = c m_2 (t_2 - t_0)$, де m_x – маса горючої речовини в другому випадку.

Розділивши друге рівняння на перше і враховуючи нерівності $t_1 \gg t_0$ і $t_2 \gg t_0$, отримаємо $\frac{m_x}{m_1} \approx \frac{t_2}{t_1}$.

Маса $m_x = \pi ((r + h_x)^2 - r^2) \rho_1 l$, де ρ_1 – густина горючої речовини, l – довжина його шару, h_x – величина, яку треба знайти а маса $m_1 = \pi ((r + h)^2 - r^2) \rho_1 l$. Тому

$$\frac{(r + h_x)^2 - r^2}{(r + h)^2 - r^2} = \frac{t_2}{t_1}$$

Звідси знаходимо: $h_x = \sqrt{r^2 + \frac{t_2}{t_1} h (h + 2r)} - r = 1,5 \text{ мм}$

9 клас

1. Учень має виготовити електричний нагрівач максимальної потужності. У нього є джерело постійної напруги $U = 30 \text{ В}$ і два шматки дроту з одного матеріалу. Обидва шматки дроту мають однакову довжину, але площі їх перетину відрізняються вдвічі. Відомо, що опір всього шматка товстого дроту дорівнює 68 Ом , а максимальний струм, який можна тривалий час пропускати таким дротом, дорівнює $I_1 = 2,5 \text{ А}$. Про тонкий дріт відомо, що він може використовуватися при струмі не більше $I_2 = 1,5 \text{ А}$. Як учень зможе виконати завдання, і якою буде потужність нагрівача? Дріт можна розрізати і з'єднувати довільним чином.

Розв'язок. При сталій напрузі джерела максимальна потужність досягається при мінімальному опорі навантаження, тобто при паралельному з'єднанні нагрівальних елементів відповідного опору. Оскільки максимальний струм для товстого дроту становить $2,5 \text{ А}$, то мінімальний опір нагрівального елемента, який виготовлений з одного шматка такого дроту має дорівнювати 12 Ом , відповідно, для іншого дроту мінімально допустимий опір становить 20 Ом . Оскільки площі перетину дротів відрізняються вдвічі, то опір всього шматка тонкого дроту дорівнює 136 Ом . Отже, для отримання максимальної потужності на кожному з елементів треба відрізати від товстого дроту 5 відрізків по 12 Ом кожний, від тонкого 6 відрізків по 20 Ом і з'єднати їх паралельно. Решта шматків мають опір 8 Ом для товстого дроту і 16 Ом для тонкого. Ще один елемент можна виготовити, послідовно з'єднавши відрізок товстого дроту з двома паралельно з'єднаними відрізками тонкого дроту по 8 Ом кожен, тобто тонкий провід також повністю витрачається. Обмеження за струмом визначається товстим проводом і становить $2,5 \text{ А}$. Потужність, що виділяється на всіх паралельно з'єднаних відрізках дротів, складе $P = U \cdot (6I_1 + 6I_2) = 720 \text{ Вт}$.

2. Ведмідь з постійною швидкістю рухається до озера. Маша щоразу згадує, що він щось залишив вдома і біжить за Ведмедем. Наздогнавши його, з тією самою швидкістю повертається додому. Перший раз Маша пододала відстань «дім-Ведмідь-дім» за час $T_1 = 4 \text{ хв}$. Другий раз відстань «дім-Ведмідь-дім» вона пробігла за $T_2 = 6 \text{ хв}$. За який час Маша пробіжить цю відстань в третій раз? Відомо, що біля Ведмеда та вдома Маша не затримується і до озера лише одна стежка.

Розв'язки.

Аналітичний. Від моменту першої зустрічі Маші і Ведмеда до моменту другої пройшов час $\frac{T_1 + T_2}{2}$. Відстань від дому до місця першої зустрічі дорівнює $AB = v_M \frac{T_1}{2}$, до місця другої зустрічі $AC = v_M \frac{T_2}{2}$. Переміщення Ведмеда (BC) можна виразити двома способами:

$$BC = v_B \frac{T_1 + T_2}{2} \text{ і } BC = v_M \frac{T_2 - T_1}{2} \Rightarrow v_B \frac{T_1 + T_2}{2} = v_M \frac{T_2 - T_1}{2}; \frac{T_2}{T_1} = \frac{v_B + v_M}{v_M - v_B}$$

Під час третього «циклу», отримаємо аналогічне співвідношення

$$v_B \frac{T_2 + T_3}{2} = v_M \frac{T_3 - T_2}{2}; \frac{T_3}{T_2} = \frac{v_B + v_M}{v_M - v_B} \quad T_3 = \frac{T_2^2}{T_1} = 9 \text{ хв}$$

Графічний. Побудуємо графіки руху $x = x(t)$ Маші та Ведмеда (рис. 9.1).

Відомо, що Маша рухалась з постійною за модулем швидкістю до Ведмедя та назад.

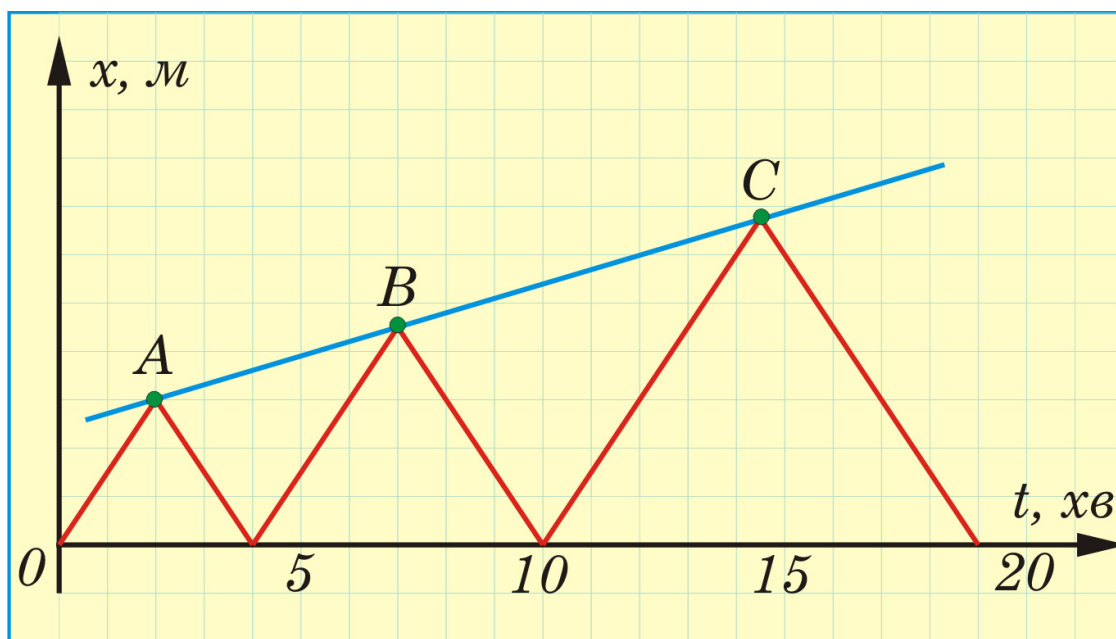


Рис. 9.3

Отже, графік її руху під час першого й другого циклів будуть представляти відрізки з однаковим кутом нахилу до осі часу. Основи «умовних» трикутників відповідно дорівнюють 4 й 6 хв. В точках А і В Маша наздоганяла Ведмедя. Отже, ці точки визначають графік руху Ведмедя (швидкість Ведмедя стала, графіком є пряма лінія). Щоб розв'язати задачу побудуємо графік руху Маші під час третього циклу і визначимо час її руху. $T_3 = 9$ хв.

3. У склянці з водою плаває дерев'яна шайба з циліндричним наскрізним отвором. Осі шайби та отвору паралельні. Площа дна склянки S , площа перерізу отвору S_1 . Отвір обережно заповнюють олією. На яку висоту підніметься шайба, якщо спочатку її частина, що виступала з води, мала висоту h . Густина олії ρ , густина води ρ_0 . Відомо, що вся олія залишилась в отворі.

Розв'язок. Нехай спочатку шайба плаває у нескінченному резервуарі з водою (рис. 9.2 а). Тоді різниця тисків біля нижньої грані шайби і на поверхні води складе величину $\Delta p = \rho_0 g (d - h)$ (1).

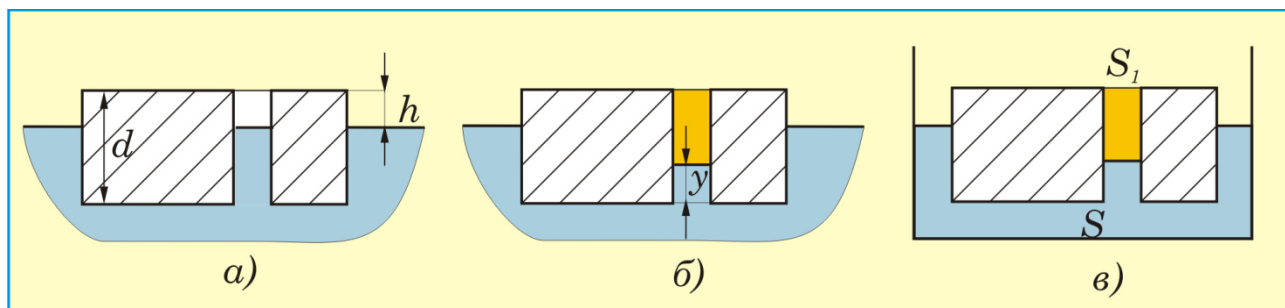


Рис. 9.2

Якщо в отвір налити олію, частина води з нього витиснеться, але різниця тисків біля нижньої грані шайби і на поверхні води не зміниться, тому $\Delta p = \rho_0 g y + \rho g (d - y)$ (2).

Із системи (1)–(2) знаходимо, що $y = d - h \frac{\rho_0}{(\rho_0 - \rho)}$ (3).

Об'єм води, витісненої з отвору, складає з урахуванням (3) величину

$$V = S_1 (d - y) = S_1 h \frac{\rho}{(\rho_0 - \rho)} \quad (4).$$

Якщо шайба плаває в нескінченному резервуарі, витіснена вода не вплине на її місцезнаходження. Якщо ж шайба плаває у склянці, можна вважати, що витіснена вода утворить шар на дні склянки висотою

$$x = \frac{V}{S} = h \frac{S_1}{S} \frac{\rho}{(\rho_0 - \rho)} \quad (5).$$

Оскільки положення шайби щодо поверхні води при цьому не зміниться, вона підніметься разом із поверхнею води на висоту (5).

4. На даху утворились бурульки конічної форми із однаковим кутом при вершині, але з різною довжиною (від найменшої $L_0 = 10$ см до найбільшої $L_1 = 50$ см). Коли температура повітря підвищилась понад 0°C , то найменша бурулька розтанула за час $t_0 = 1$ год. Через який час при незмінній температурі повітря розтануть усі бурульки?

Розв'язок. Кількість теплоти Q , що надходить до бурульки з оточуючого середовища, пропорційна площі її поверхні й часу та йде на плавлення льоду: $Q = m \cdot \lambda$, де λ – питома теплота плавлення льоду. Маса льоду, що розтанув за час t дорівнює $m = \rho \cdot S \cdot \Delta h$, де Δh – товщина шару льоду, що розтанув, яка пропорційна зміні довжини бурульки, оскільки остання тане з поверхні, зберігаючи свою форму.

Отримаємо, що $Q = m \cdot \lambda = \rho \cdot S \cdot \Delta h \cdot \lambda \sim \rho \cdot S \cdot \Delta L \cdot \lambda \sim S \cdot \Delta t$, звідки $\Delta L / \Delta t \sim 1 / \rho \cdot \lambda$.

Таким чином, довжина бурульки зменшується зі сталою швидкістю, і бурулька довжиною L_1 розтане за час $t = t_0 \cdot L_1 / L_0 = 5$ год.

5. Вантаж невідомої маси зважують, зрівноваживши його гирькою відомою маси M на кінцях важкого прямого коромисла; при цьому рівновага досягається, коли точка опори коромисла зміщується від його середини на $x = 1/4$ його довжини в бік гирьки. За відсутності вантажу на другому плечі коромисло залишається в рівновазі при зміщенні його точки опори від середини в бік гирьки на $y = 1/3$ його довжини. Вважаючи коромисло однорідним за довжиною, знайдіть масу вантажу m .

Розв'язок. При зважуванні вантажу невідомої маси m на плечі коромисла довжиною L діють сили mg , Mg і $m_k g$, де m_k – маса коромисла (рис. 9.4). Плечі цих сил відносно вісі, що проходить через точку опору перпендикулярно площині рисунка, дорівнюють $(0,5 + x)L$, $(0,5 - x)L$ і xL відповідно. Умова рівноваги важеля має вигляд:

$$mg (0,5 + x)L + m_k g x L = Mg (0,5 - x)L, \text{ звідки: } m = \frac{M (0,5 - x) - m_k x}{0,5 + x}.$$

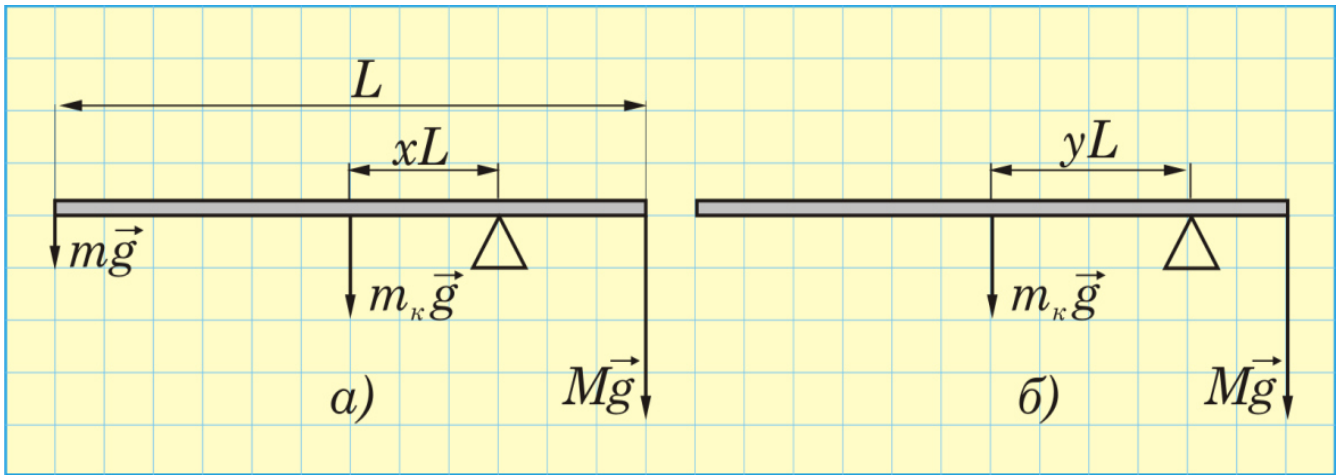


Рис. 9.4

Розглянемо тепер друге зважування (без вантажу невідомої маси), яке дозволить нам знайти масу коромисла. Плечі сил Mg і $m_k g$ будуть тепер дорівнювати $(0,5 - y) L$ і yL відповідно. Тоді умова рівноваги важеля дає:

$$m_k g y L = Mg (0,5 - y) L, \text{ звідки } m_k = \frac{M (0,5 - y)}{y}.$$

$$\text{Отже, } m = \frac{M (0,5 - x) - \frac{M (0,5 - y)}{y} \cdot x}{0,5 + x} = M \frac{y - x}{y (1 + 2x)} = M \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} (1 + 2 \cdot \frac{1}{4})} = \frac{M}{6}.$$

10 клас

1. Учень має виготовити електричний нагрівач максимальної потужності. У нього є джерело постійної напруги $U = 30 \text{ В}$ і два шматки дроту з одного матеріалу. Обидва шматки дроту мають однакову довжину, але площі їх перетину відрізняються вдвічі. Відомо, що опір всього шматка товстого дроту дорівнює 68 Ом , а максимальний струм, який можна тривалий час пропускати таким дротом, дорівнює $I_1 = 2,5 \text{ А}$. Про тонкий дріт відомо, що він може використовуватися при струмі не більше $I_2 = 1,5 \text{ А}$. Як учень зможе виконати завдання, і якою буде потужність нагрівача? Дріт можна розрізати і з'єднувати довільним чином.

Розв'язок. При сталій напрузі джерела максимальна потужність досягається при мінімальному опорі навантаження, тобто при паралельному з'єднанні нагрівальних елементів відповідного опору. Оскільки максимальний струм для товстого дроту становить $2,5 \text{ А}$, то мінімальний опір нагрівального елемента, який виготовлений з одного шматка такого дроту має дорівнювати 12 Ом , відповідно, для іншого дроту мінімально допустимий опір становить 20 Ом . Оскільки площі перетину дротів відрізняються вдвічі, то опір всього шматка тонкого дроту дорівнює 136 Ом . Отже, для отримання максимальної потужності на кожному з елементів треба відрізати від товстого дроту 5 відрізків по 12 Ом кожний, від тонкого 6 відрізків по 20 Ом і з'єднати їх паралельно. Решта шматків мають опір 8 Ом для товстого дроту і 16 Ом для тонкого. Ще один елемент можна виготовити, послідовно з'єднавши відрізок товстого дроту з двома паралельно з'єднаними відрізками тонкого дроту по 8 Ом кожен, тобто тонкий провід також повністю витрачається. Обмеження за струмом визначається товстим проводом і становить $2,5 \text{ А}$. Потужність, що виділяється на всіх паралельно з'єднаних відрізках дротів, складе $P = U \cdot (6I_1 + 6I_2) = 720 \text{ Вт}$.

2. Космічна експедиція відкрила планету, схожу на Землю, яка має таку саму масу M та радіус R . Згодом виявилось, що половина маси планети зосереджена в ядрі радіуса $R/2$, центр якого зміщений на $R/4$ відносно центру планети. В яких межах змінюється прискорення сили тяжіння на поверхні планети?

Розв'язок. На рис. 10.1 схематично зображено будову планети в перерізі. Очевидно, що максимальне та мінімальне значення прискорення вільного падіння знаходяться в точках А та В, розташованих на кінцях діаметра, що проходить через центри планети O_1 та ядра O_2 .

Розрахуємо густини ядра планети та самої планети, враховуючи, що об'єм речовини планети дорівнює повному об'єму без урахування ядра:

$$\rho_1 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{7\pi R^3} \quad (2.1)$$

$$\rho_2 = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3/8} = \frac{3M}{\pi R^3} \quad (2.2)$$

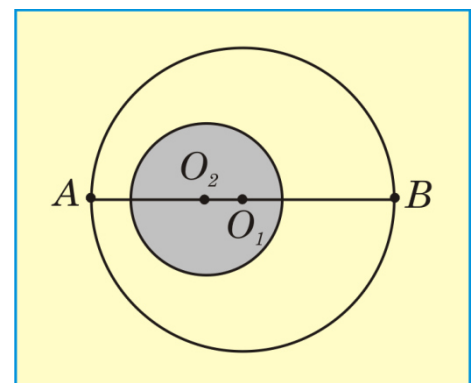


Рис. 10.1

Відомо, що у випадку рівномірного розподілу маси кулі дія гравітації буде такою, якби вся маса була зосереджена в центрі. Тоді гравітаційне поле можна подати як суперпозицію поля планети з густиною ρ_1 та ядра з густиною $\rho_2 - \rho_1$.

Таким чином, з урахуванням викладених вище міркувань, прискорення вільного падіння в т. А дорівнюватиме:

$$g_A = G \left[\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{3}{4} R\right)^2} \right] = G \left[\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{9 R^2} \right] =$$

$$= \frac{8GV_2}{9R^2} (7\rho_1 + 2\rho_2) = \frac{4}{3} \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3} g_0$$

де $g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Аналогічно знайдемо прискорення вільного падіння в т. В:

$$g_B = G \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} - \frac{\rho_1 V_2}{\left(\frac{5}{4} R\right)^2} + \frac{\rho_2 V_2}{\left(\frac{5}{4} R\right)^2} \right) = G \left(\frac{\rho_1 V_1}{R^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) V_2}{\left(\frac{5}{4} R\right)^2} \right) =$$

$$= G \left(\frac{8\rho_1 V_2}{R^2} + \frac{16(\rho_2 - \rho_1) V_2}{25 R^2} \right) = \frac{8GV_2}{25 R^2} (23\rho_1 + 2\rho_2) = \frac{148}{175} \frac{GM}{R^2} = \frac{148}{175} g_0$$

Розрахуємо чисельно значення прискорення вільного падіння в т. А та т. В: $g_A = 13,1 \text{ м/с}^2$, $g_B = 8,3 \text{ м/с}^2$.

3. На даху утворились бурульки конічної форми із однаковим кутом при вершині, але з різною довжиною (від найменшої $L_0=10 \text{ см}$ до найбільшої $L_1=50 \text{ см}$). Коли температура повітря підвищилась понад 0°С , то найменша бурулька розтанула за час $t_0=1 \text{ год}$. Через який час при надалі незмінній температурі повітря розтануть усі бурульки?

Розв'язок. Кількість теплоти Q , що надходить до бурульки з оточуючого середовища, пропорційна площі її поверхні та часу, який йде на плавлення льоду: $Q = m \cdot \lambda$, де λ – питома теплота плавлення льоду. Маса льоду, що розтанув за час t дорівнює $m = \rho \cdot S \cdot \Delta h$, де Δh – товщина шару льоду, що розтанув, яка пропорційна зміні довжини бурульки, оскільки остання тане з поверхні, зберігаючи свою форму.

Отримаємо, що $Q = m \cdot \lambda = \rho \cdot S \cdot \Delta h \cdot \lambda \sim \rho \cdot S \cdot \Delta L \cdot \lambda \sim S \cdot \Delta t$, звідки $\Delta L / \Delta t \sim 1 / \rho \cdot \lambda$.

Таким чином, довжина бурульки зменшується зі сталою швидкістю, і бурулька довжиною L_1 розтане за час $t = t_0 \cdot L_1 / L_0 = 5 \text{ год}$.

4. Рибалка знаходиться на окремій крижині прямокутної форми, горизонтальні розміри якої значно більші за товщину. Крижина плаває на воді поряд із берегом і може витримати розміщену в її центрі масу M . Рибалка якої маси m може, не замочивши ніг, зійти з крижини в середині її ребра без відштовхування? Густину криги вважати $0,9 \text{ г/см}^3$.

Розв'язок. Маса m на середині крижини занурить її на $h = \frac{m}{M} \cdot \frac{H}{10}$. При зміщенні маси на середину ребра центр мас крижини практично не зміниться відносно рівня води, а

сама крижина нахилиться на деякий кут α до горизонту. Момент сили виштовхування, що діє на смужки шириною Δx та довжиною l , розміщені на відстані $-L/2 \leq x \leq L/2$ від центра мас: $N_0 = \rho g \alpha l x^2 \Delta x$, а сумарний момент сил $N = \rho g \alpha l L^3 / 12$ (ρ – густина води). Цей момент врівноважує момент сил з боку маси m : $\rho g \alpha l L^3 / 12 = m g L / 2$. Звідси величина додаткового опускання краю крижини внаслідок її нахилу $h_2 = \alpha L / 2 = 3m / (\rho l L)$. Разом із опусканням центра мас по вертикалі h загальне зміщення краю крижини с масою m не повинно бути більшим за $H/10$: $h + h_2 = \frac{m}{M} \cdot \frac{H}{10} + \frac{3m}{\rho l L} < \frac{H}{10}$. Враховуючи, що $M = \rho S l H / 10$, отримаємо $m < M/4$.

5. Якою має бути найменша відстань між предметом та його дійсним зображенням, отриманим за допомогою тонкої збиральної лінзи з фокусною відстанню f ?

Розв'язок. 1. Формальний розв'язок через рівняння лінзи. Запишемо рівняння лінзи у формі

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (1)$$

Очевидно, що $l = a + b$ – відстань між предметом та його дійсним зображенням. Виключивши b , отримаємо:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} = \frac{1}{f}, \quad (2) \quad \text{звідки} \quad l = \frac{a^2}{a-f}. \quad (3)$$

Тривіальний шлях знаходження мінімуму l для тих, хто знайомий з диференціюванням: $dl/da = 0$, звідки $a = 2f$, $l = 4f$.

Якщо учні не знайомі з диференціюванням, можна ввести безрозмірну змінні $y = l/f$ і $x = a/f$, так що $y = \frac{x^2}{x-1}$. Побудувавши по точках графік y x , переконуємося, що його мінімум $y = 4$ досягається при $x = 2$ (рис. 1).

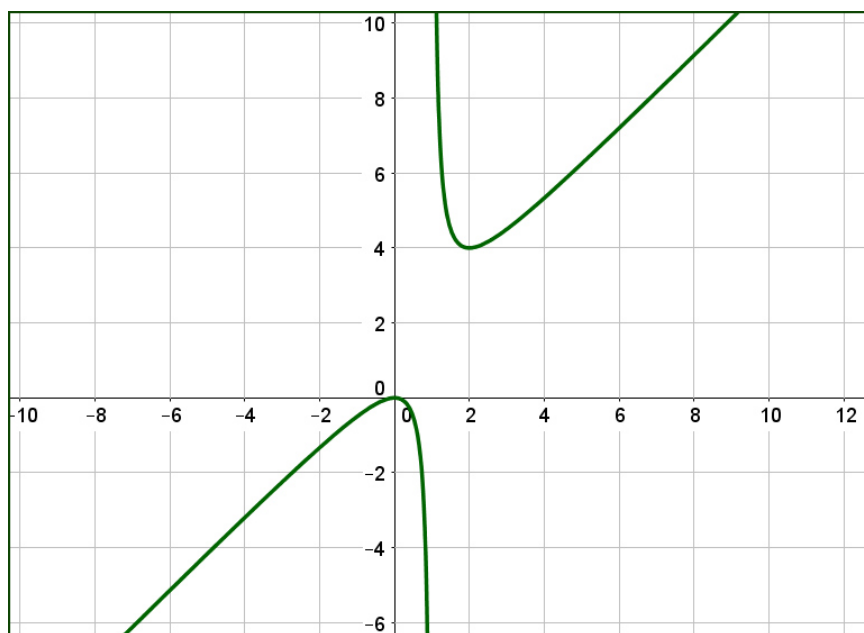


Рис. 10.2

2. Нетривіальний шлях. Намалюємо хід променів у системі (рис. 2). Щоб зображення було дійсним, необхідно, щоб предмет розташовувався на віддалі від лінзи, що перевищує її фокусну віддаль.

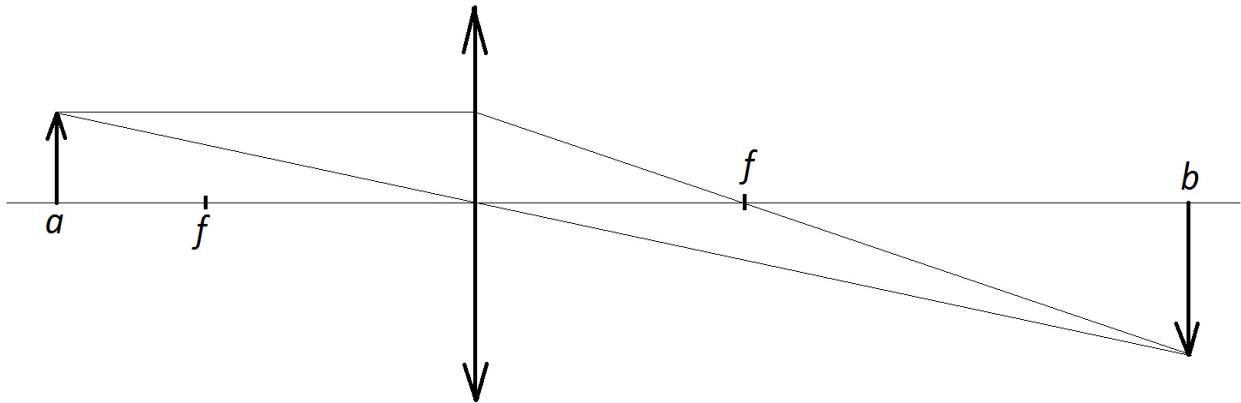


Рис. 10.3

Якщо предмет наближається до фокусу, зображення віддаляється на нескінченність. З іншого боку, якщо поміняти зображення і предмет, хід променів не зміниться. Очевидно, мінімальна віддаль між предметом та зображенням відповідає симетричній конфігурації, коли віддалі від лінзи до предмету і його зображення однакові. З рівняння лінзи (1) тоді випливає, що $a = b = 2f$, $l = 4f$.

11 клас

1. Експериментатор запустив секундомір у момент часу, коли в чайнику закипіла вода. Вся води википіла через 1781 секунд. Після цього він заповнив чайник льодом тієї ж маси за нульової температури, запалив газ та одночасно запустив секундомір. До журналу дослідник записав, що в другому випадку чайник закипів через 2075 секунд. Цифра θ була зображена нерозбірливо, це може бути 0, 3 або 6. Яку цифру записано в журналі? Теплоємність води $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), теплота плавлення льоду $\lambda = 3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг, теплота пароутворення $q = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Розв'язок. Енергія, необхідна для випаровування води масою m : $Q_1 = qm$ (1.1). Позначивши як P корисну потужність чайника, можемо записати наступний вираз: $Pt_1 = qm$, (1.2) де $t_1 = 1781$ с. В другій частині експерименту слід здійснити наступні процеси: 1) розтопити лід, 2) нагріти воду до температури кипіння, 3) випарувати воду.

Загальна енергія, необхідна для цього, запишеться так:

$$Q_2 = \lambda m + cm\Delta T + qm \quad (1.3)$$

Враховуючи вираз (1.2), перепишемо (1.3) таким чином:

$$Pt_2 = \lambda m + cm\Delta T + qm \quad (1.4)$$

В другому випадку енергія, отримана від чайника, становить $Q_2 = Pt_2$. Врахувавши це та вираз (1.4), можемо записати наступне:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\lambda + c\Delta T}{q} + 1 \quad (1.5)$$

Тепер можемо знайти вираз для знаходження часу t_2 :

$$t_2 = t_1 \left(\frac{\lambda + c\Delta T}{q} + 1 \right). \quad (1.6)$$

Підставимо числові значення:

$$t_2 = 1781 \left(\frac{3,34 \times 10^5 + 4,2 \times 10^3}{2,26 \times 10^6} + 1 \right) \approx 2375 \text{ с}$$

Таким чином, цифра, записана експериментатором в журналі, $\theta = 3$.

В той же час, даний розв'язок отриманий без урахування втрат тепла, які у другому випадку, очевидно, будуть більшими, оскільки час нагрівання також більший. В свою чергу, в умові не зазначено, чи можна знехтувати цими втратами. Також в умові стверджується, що чайник у другому випадку закипів через 2075 секунд (саме «закипів» а не «википів»). Усі учасники олімпіади, що зазначили цей недолік умови задачі та спробували отримати точніший розв'язок, отримали за дану задачу додаткові бали (до 2). Максимальна оцінка за наведений вище базовий варіант розв'язку – 8 балів з 10.

2. Визначте максимальне прискорення, з яким може злітати вертикально гвинтокрил, власна маса якого M , потужність двигуна P , діаметр гвинта – d із вантажем на борту масою m .

Розв'язок. Вважаємо, що гвинтокрил відкидає вниз потік повітря густиною ρ з перерізом $\frac{\pi d^2}{4}$ зі

швидкістю u . Тоді за час t гвинт надасть повітря масою $m_0 = \Delta m = \rho \frac{\pi d^2}{4} u t$ (1) імпульс

$p = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2 t$ (2) і кінетичну енергію $W = \rho \frac{\pi d^2}{8} u^3 t$ (3). Сила тяги гвинта буде $F = \frac{p}{t} = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2$

(4). Невідому швидкість повітря знайдемо з умови, що вся потужність двигуна витрачається на

створення потоку повітря: $\frac{W}{t} = P$ (5), звідки з урахуванням (3) $u = \left(\frac{8P}{\rho \pi d^2} \right)^{1/3}$ (6).

Остаточно сила тяги з урахуванням (6) набуває вигляду $F = (\pi \rho)^{1/3} (P d)^{2/3}$ (7).

Шукане прискорення визначається різницею сили тяги гвинта і ваги гвинтокрила, віднесеною до сумарної маси:

$$a = \frac{F}{M+m} - g = \frac{(\pi \rho)^{1/3} (P d)^{2/3}}{M+m} - g \quad (8).$$

3. Підводний човен, занурений на глибину $r = 200$ м здійснює пуск торпеди в напрямку надводного корабля, що пливе на прямій відстані $a = 3$ км від човна. Визначте мінімальний час, через який гідроакустичні приймачі корабля зможуть зафіксувати звук пуску торпеди, якщо постійна глибина дна становить $h = 500$ м, а швидкості поширення звуку у воді та ґрунті дна відповідно $u = 1500$ м/с та $v = 4000$ м/с.

Розв'язок. Шляхом, по якому при даних параметрах звук дійде до корабля за найменший час, буде очевидно msl . Час його проходження:

$$t = \frac{m}{u} + \frac{b-x-y}{v} + \frac{l}{u} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 + y^2}}{u} + \frac{b-x-y}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{u}$$

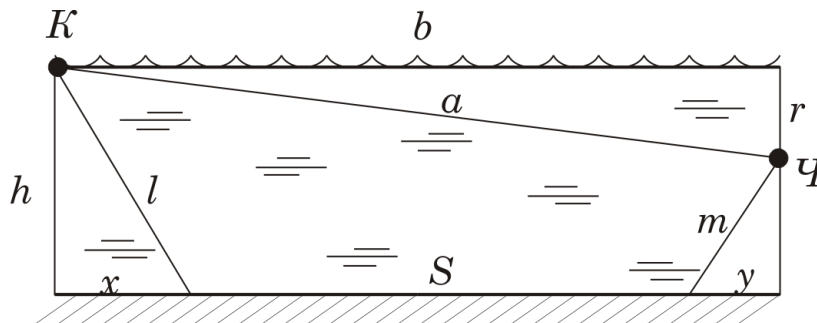


Рис. 11.1

Для знаходження мінімального часу, знаходимо похідні від функції $t(x, y)$ послідовно по змінним x та y , вважаючи іншу змінну при цьому сталою:

$$t'_x = -\frac{1}{v} - \frac{2x}{2u\sqrt{h^2 + x^2}}, \text{ звідки } x = \frac{uh}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

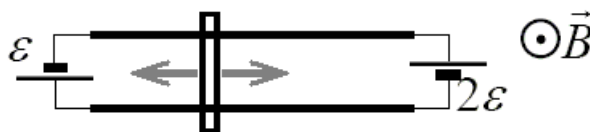
$$t'_y = -\frac{1}{v} - \frac{2y}{2u\sqrt{(h-r)^2 + y^2}}, \text{ звідки } y = \frac{u(h-r)}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Підставляючи отримані значення x та y в першу формулу, отримаємо шуканий час:

$$t = \frac{\sqrt{(h-r)^2 + \frac{u^2(h-r)^2}{v^2 - u^2}}}{u} + \frac{b - \frac{uh}{\sqrt{v^2 - u^2}} - \frac{u(h-r)}{\sqrt{v^2 - u^2}}}{v} + \frac{\sqrt{h^2 + \frac{u^2 h^2}{v^2 - u^2}}}{u}$$

Проходження звуку будь-яким іншим шляхом (зокрема, по прямій через воду – $t = a/u = 3000/1500 = 2$ с) займатиме більший час. *Відповідь:* $t \approx 1,24$ с.

4. Паралельні горизонтальні рейки довжиною L і з опором одиниці довжини ρ закріплені паралельно на відстані l одна до одної. До кінців рейок приєднані дві батареї:



одна з е.р.с. ε , друга – з е.р.с. 2ε . На рейки встановлюють невеликий металевий (провідний) візок масою m , який може рухатись без тертя уздовж рейок. Вся система знаходиться у вертикальному магнітному полі з індукцією B (див. рис., вигляд зверху). На якій відстані від лівого краю рейок знаходитиметься положення рівноваги візка? Знайдіть період малих коливань візка біля положення рівноваги. Тертям, опором візка, джерел і дрітків, а також індуктивністю кола знехтувати.

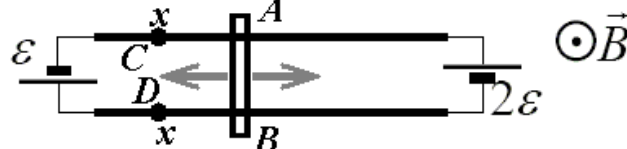
Розв'язок. Візок буде перебувати у рівновазі, якщо струм через нього буде дорівнювати нулю (тоді на нього не діятиме магнітне поле). Це становище можна знайти із законів Ома для замкненого кола і неоднорідної ділянки кола. Згідно із законом Ома для замкненого кола маємо для струму в рейках (при умови, що струм через візок дорівнює нулю):

$$I = \frac{3\varepsilon}{2\rho L} \quad (1)$$

Нехай довжина рейок від положення рівноваги візка до е.р.с. ε дорівнює x . Тоді за законом Ома для ділянки кола AB , що містить е.р.с. ε , маємо (за умови, що напруга між його кінцями дорівнює нулю)

$$\varepsilon = 2I\rho x = \frac{3\varepsilon}{L}x \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

Якщо ж розглянути ділянку кола CD , що містить е.р.с. ε і коротші, ніж x частини рейок (див. рис.), то із закону Ома для неоднорідної ділянки кола



$$U_{DC} = \varepsilon - Ir \quad (3)$$

де r – опір рейок між точками C і D (через ε), впливає, що $U_{DC} > 0$ (оскільки $r < 2\rho x$). Тому, якщо візок буде зміщуватися з положення рівноваги ліворуч, по ньому починає протікати струм, спрямований вгору (див. рис.), і з боку магнітного поля на візок діє сила Ампера, спрямована праворуч. Аналогічно доводиться, що якщо візок зміститься від положення рівноваги праворуч, то сила Ампера буде направлена ліворуч. Таким чином, при будь-яких зсувах візка в ньому буде виникати електричний струм, і сила Ампера буде повертати візок у положення рівноваги. Це призведе до того, що візок буде здійснювати коливання біля положення рівноваги.

Щоб знайти період коливань, знайдемо повертальну силу. Нехай зміщення візка від положення рівноваги дорівнює Δx , а струми через джерела в цьому положенні рівні I_1 і I_2 . Тоді, оскільки напруга на кінцях візка в будь-який який момент часу дорівнює нулю, за законом Ома для ділянки кола між A і B через джерело ε маємо:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2\rho((L/3) - \Delta x)} \quad (4)$$

Аналогічно для струму через друге джерело: $I_2 = \frac{2\varepsilon}{2\rho((2L/3) + \Delta x)} \quad (5)$

З формул (4), (5) можна знайти струм через візок:

$$i = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2\rho} \frac{3\Delta x}{((L/3) - \Delta x)((2L/3) + \Delta x)} \approx \frac{27\varepsilon}{4\rho L^2} \Delta x \quad (6)$$

(В останній наближеній рівності використана малість відхилення візка від положення рівноваги у порівнянні з довжиною рейок). З формули (6) випливає, що сила Ампера, яка діє на візок з боку магнітного поля –

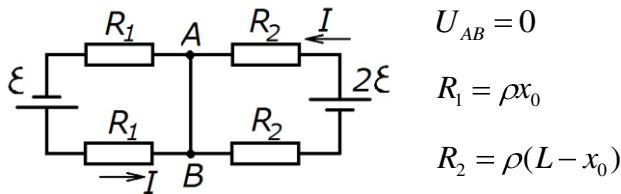
$$F = iBl = \frac{27\varepsilon Bl}{4\rho L^2} \Delta x \quad (7)$$

пропорційна зсуву візка, і, отже, візок буде здійснювати гармонічні коливання з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4m\rho L^2}{27Bl\varepsilon}} \quad (8)$$

У наведеному вище розв'язку не враховується явище електромагнітної індукції. Розглянемо тепер, до чого приведе її врахування.

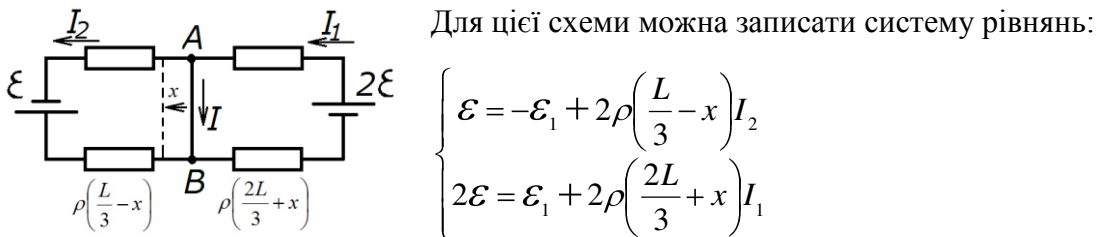
Спочатку знайдемо положення рівноваги:



За законом Кірхгофа можна записати:

$$\varepsilon = 2IR_2, \text{ з іншого боку } 3\varepsilon = I(2R_1 + 2R_2). \text{ Звідси маємо } 3R_1 = R_1 + R_2, \text{ тобто } R_1 = R_2/2$$

Таким чином, відстань $x_0 = L/3$. Коли візок зміщується відносно положення рівноваги, схема набуває вигляду:



Струм через візок буде дорівнювати $I = I_1 - I_2$, і для такого струму на нього у поперечному магнітному полі діятиме сила $ma = B \cdot l \cdot I$. Як ε_1 тут позначено ЕРС електромагнітної індукції, яка за законом Фарадея дорівнює:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dS}{dt} \cdot B = \frac{dx}{dt} \cdot l \cdot B = v \cdot l \cdot B.$$

З системи рівнянь для струмів I_1 та I_2 можна записати вирази:

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - \varepsilon_1}{2\rho\left(\frac{2L}{3} + x\right)}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{2\rho\left(\frac{L}{3} - x\right)}.$$

Звідси струм через візок:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2\varepsilon - \varepsilon_1}{2\rho\left(\frac{2L}{3} + x\right)} - \frac{\varepsilon + \varepsilon_1}{2\rho\left(\frac{L}{3} - x\right)} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{2\varepsilon \frac{L}{3} - 2\varepsilon x - \varepsilon_1 \frac{L}{3} + \varepsilon_1 x - \varepsilon \frac{2L}{3} - \varepsilon x - \varepsilon_1 \frac{2L}{3} - \varepsilon_1 x}{\left(\frac{2L}{3} + x\right)\left(\frac{L}{3} - x\right)} \right).$$

Оскільки за умовою коливання малі, знехтуємо x^2 у знаменнику:

$$I = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{-3\varepsilon x - \varepsilon_1 L}{\frac{2L^2}{9} + x \frac{L}{3} - x \frac{2L}{3} - x^2} \right) \approx -\frac{9}{4\rho L^2} \left(\frac{3\varepsilon x + \varepsilon_1 L}{1 - \frac{3x}{2L}} \right).$$

Тепер можна застосувати формулу бінома Ньютона $(1+y)^\alpha \approx 1 + \alpha y$ при $y \ll 1$. Отримаємо:

$$I = -\frac{9}{4\rho L^2} \left(\frac{3\varepsilon x + \varepsilon_1 L}{1 - \frac{3x}{2L}} \right) \approx -\frac{9}{4\rho L^2} (3\varepsilon x + \varepsilon_1 L) \left(1 + \frac{3x}{2L} \right) = -\frac{9}{4\rho L^2} \left(3\varepsilon x + \varepsilon_1 L + \varepsilon_1 \frac{3x}{2} + \frac{9\varepsilon x^2}{2L} \right),$$

де знову можна знехтувати доданком з x^2 . Врешті отримаємо:

$$I \approx -\frac{9}{4\rho L^2} \left(3\varepsilon x + \varepsilon_1 L + \varepsilon_1 \frac{3x}{2} \right) = -\frac{9}{4\rho L} \left(3\varepsilon \frac{x}{L} + \varepsilon_1 \frac{3x}{2L} + \varepsilon_1 \right)$$

Тоді сила, що діє на візок:

$$ma = B \cdot l \cdot I = -\frac{9Bl}{4\rho L} \left(3\varepsilon \frac{x}{L} + \varepsilon_1 \frac{3x}{2L} + \varepsilon_1 \right). \text{ Запишемо це у вигляді диференціального рівняння:}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{9Bl}{4\rho L} \left(3\varepsilon \frac{x}{L} + \varepsilon_1 \frac{3x}{2L} + \varepsilon_1 \right) = -\frac{27Bl\varepsilon}{4\rho L^2} x - \frac{9Bl}{4\rho L} \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3x}{2L} \right), \text{ тобто}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{27Bl\varepsilon}{4\rho L^2} x + \frac{9Bl}{4\rho L} \varepsilon_1 \left(1 + \frac{3x}{2L} \right) = 0.$$

Тепер підставимо сюди вираз для ЕРС індукції $\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dS}{dt} \cdot B = \frac{dx}{dt} \cdot l \cdot B = v \cdot l \cdot B$. Отримаємо:

$$\text{мо: } m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{27Bl\varepsilon}{4\rho L^2} x + \frac{9Bl}{4\rho L} \left(1 + \frac{3x}{2L} \right) \frac{dx}{dt} lB = 0. \text{ Доданком з } x \frac{dx}{dt} \text{ можна знехтувати, оскільки коли-}$$

вання є малими. Таким чином, отримаємо рівняння:

$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2} x + \frac{9B^2 l^2}{4\rho L} \frac{dx}{dt} = 0$. Це рівняння згасаючих коливань, частоту яких можна знайти за формулою: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, $\omega_0^2 = \frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2}$, $\lambda = \frac{9B^2 l^2}{8\rho L}$

Врешті-решт, для частоти коливань отримаємо: $\omega = \sqrt{\frac{27Bl\mathcal{E}}{4\rho L^2} - \left(\frac{9B^2 l^2}{8\rho L}\right)^2} = \frac{9Bl}{2\rho L} \sqrt{\frac{\rho\mathcal{E}}{3Bl} - \frac{B^2 l^2}{16}}$, а для періода цих коливань: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi\rho L}{9Bl \sqrt{\frac{\rho\mathcal{E}}{3Bl} - \frac{B^2 l^2}{16}}}$

Отже, при врахуванні явища електромагнітної індукції виявляється, що коливання будуть згасати.

5. Корпорація SpaceX для повернення першого ступеня своєї ракети-носія Falcon 9 використовує автоматичні баржі в океані, на які можуть сідати ці ступені (використовуючи власні ракетні двигуни). Така баржа являє собою приблизно прямокутний паралелепіпед розмірами 90х50х6 метрів (висота борту становить 6м) та загальною масою 600 тон. Вважаючи, що загальний об'єм конструкцій баржі набагато менший за її внутрішній порожній об'єм, знайдіть глибину занурення дна баржі: а) до посадки першого ступеня ракети. Температура баржі дорівнює температурі довкілля і становить $T_0 = 300\text{K}$, а густина повітря при такій температурі дорівнює $\rho_0 = \text{кг/м}^3$; б) після посадки першого ступеня ракети, вважаючи, що баржа під дією полум'я ракетних двигунів нагрілася до $T = 360\text{K}$, маса першого ступеня після посадки на баржу становить $M_R = 34.5$ тон, а повітря може вільно виходити з внутрішнього об'єму баржі. Вважати, що густина океанської води $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$

Розв'язок: а) Оскільки загальний об'єм конструкцій баржі набагато менший за її внутрішній порожній об'єм, можна вважати, що повітря займає: $V = 90 \cdot 50 \cdot 6 = 27000 \text{ м}^3$. Глибина занурення дна баржі визначається її масою та густиною витисненої води: $M_0 = 600 \text{ тон} = 3 \cdot 10^6 \text{ кг} = \rho_v \cdot S \cdot h_0$, де: $S = 90 \cdot 50 = 4500 \text{ м}^2$ – площа палуби баржі, а h_0 – глибина занурення її дна до посадки першого ступеня.

Маємо: $h_0 = M_0 / (\rho_v \cdot S) = 2/15 \text{ м} \approx 0,133 \text{ м}$.

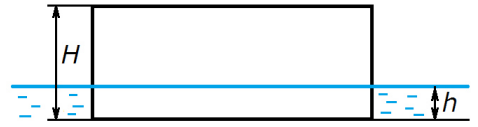
б) Після нагрівання баржі полум'ям ракетних двигунів тиск повітря всередині зросте, і тому частина повітря вийде назовні. В результаті густина повітря всередині, а отже і загальна маса баржі дещо зменшиться.

До посадки першого ступеня маса повітря всередині баржі становила $m_0 = \rho_0 \cdot V = 27000 \text{ кг} = 27 \text{ тон}$. За рівнянням стану ідеального газу при сталому тиску повітря маємо: $p \cdot V = m_0 \cdot R \cdot T_0 / \mu = m \cdot R \cdot T / \mu$. Звідси маса повітря всередині баржі після посадки буде становити: $m = m_0 \cdot T_0 / T = 27000 \cdot 300 / 360 = 22500 \text{ кг}$. Тоді загальна маса баржі після посадки першого ступеня (враховуючи його масу) становитиме:

$$M = M_0 + m - m_0 + M_R = 600 + 22,5 - 27 + 34,5 = 630 \text{ тон}.$$

Тоді глибина занурення дна баржі після посадки на неї першого ступеня становитиме: $h = M / (\rho_e \cdot S) = 0,14 \text{ м}$.

У наведеному вище розв'язку не враховується архімедова сила, що діє на баржу з боку атмосферного повітря. В той же час, глибина занурення баржі буде досить невеликою, і більша її частина залишиться у повітрі. Для врахування архімедової сили з боку повітря розглянемо рисунок.



Умова рівноваги вертикальних сил, що діють на баржу, до посадки першого ступеня запишеться тоді таким чином: $M_0 g = \rho_e g h_0 S + \rho_0 g (H - h_0) S$, звідки можна знайти h_0 :

$$h_0 = \frac{M_0 - \rho_0 H S}{S(\rho_e - \rho_0)} \approx 0,127 \text{ м}$$

Після посадки першого ступеня та нагрівання баржі умова набуде вигляду (нагріванням повітря іззовні знехтуємо): $(M_0 + M_R) g + (\rho - \rho_0) g H S = \rho_e g h S + \rho_0 g (H - h) S$.

Густину повітря всередині баржі після нагрівання можна знайти як: $\rho = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{T_0}{T} \approx 0,833 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Тоді глибина занурення після посадки першого ступеня буде рівною:

$$h = \frac{M_0 + M_R + (\rho - 2\rho_0) H S}{S(\rho_e - \rho_0)} \approx 0,134 \text{ м}$$

**Можливі розв'язки завдань практичного туру 2017 року
8, 9 класи**

1. Визначити коефіцієнт тертя між сірниковою коробкою та поверхнею стола.

Обладнання: сірникова коробка, смужка міліметрового паперу, нитка.

Брусок з прив'язаною до довгої грані ниткою поставте торцем на горизонтальну поверхню столу і тягніть за нитку. Якщо нитка закріплена невисоко над поверхнею столу, то брусок буде ковзати. При певній висоті h точки A кріплення нитки сила натягу нитки F перекидає брусок.

Умови рівноваги для цього випадку щодо точки перекидання: $Fh - mga/2 = 0$; $F - F_{mp} = 0$; $N - mg = 0$. Звідси: $\mu = \frac{a}{2h}$

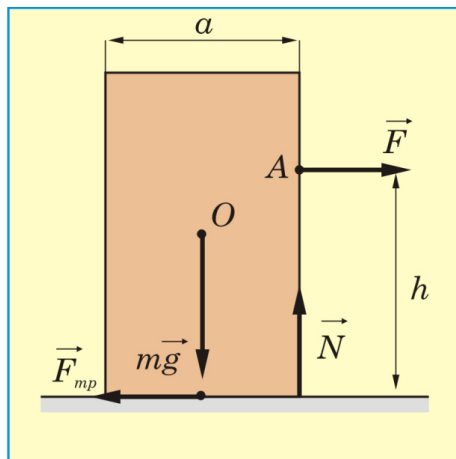


Рис. 1

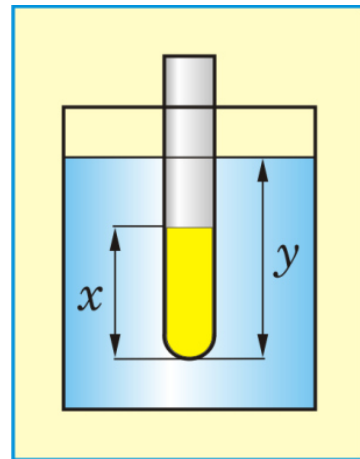


Рис. 2

2. Визначити густину скла, з якого виготовлена пробірка.

Обладнання. Пробірка, що досліджується, мензурка, ємність з водою (обрізана зверху порожня пластикова пляшка об'ємом 1,5 – 2,0 л), шприци об'ємом 1 мл і 20 мл, штапик, міліметровий папір, скотч і ножиці (на вимогу).

Розв'язок. Обмотавши пробірку шматочком міліметрового паперу, визначимо периметр $P = \pi \cdot D$. Тоді зовнішній діаметр D . Внутрішній діаметр пробірки можна виміряти, доливши до неї шприцом воду і вимірявши зміну рівня Δx . Об'єм наливої води $\Delta V_1 = \frac{1}{4} \pi d^2 \Delta x$ нам відомий, оскільки ми наливаємо її шприцом.

Для того, щоб пробірка плавала вертикально, потрібно налити в неї деяку кількість води. Вимірюємо рівні x та y , наклеївши на пробірку з допомогою скотча смужку міліметрового паперу, яка слугить нам шкалою.

Воду в досліджувану пробірку наливаємо шприцом, таким чином ми знаємо об'єм V_1 . Для вимірювання об'єму V_2 зануримо малу пробірку в більшу до тієї ж глибини y . Відзначимо рівень води у великій пробірці. Потім виймемо малу пробірку і шприцом доліємо у велику пробірку води до зазначеного рівня. Об'єм долитої води дорівнює V_2 .

Згідно із законом Архімеда $(m + \rho_0 V_1) g = \rho_0 V_2 g$, отже, масу пробірки можна розрахувати за формулою $m = \rho_0 (V_1 - V_2)$. (1)

Виміряємо об'єм води, яка виштовхується під час повного занурення малої пробірки в більшу та повний внутрішній об'єм малої пробірки. Різниця цих об'ємів і є об'єм скла пробірки V . Розрахуємо густину матеріалу пробірки за формулою $\rho = \frac{m}{V}$.

10 клас

1. Визначити силу тиску "губок" прищипки.

Обладнання: смужка скочу, аркуш паперу, прищипка, стаканчик, сіль (пісок, вода тощо), лінійка.

Розв'язок. Силу тиску "губок" прищипки можна знайти, якщо затиснути між ними складений вдвоє скоч (клеюкою стороною всередину), до якого підвісити стаканчик з сіллю. Маса стаканчика з сіллю повинна бути такою, щоб стрічка почала зісковзувати з прищипки. Тоді: $2 \mu N = m g$, де μ – коефіцієнт тертя ковзання між прищипкою та стрічкою, N – реакція з боку стрічки (за модулем дорівнює силі тиску прищипки), m – маса солі у стаканчику (масою стаканчика і стрічки нехтуємо).

$$N = \frac{m g}{2 \mu}$$

Коефіцієнт тертя можна знайти приклеївши до паперу стрічку і поклавши на неї прищипку. Повільно збільшуючи кут нахилу, досягнути моменту, коли прищипка почне зісковзувати зі сталою швидкістю. Тангенс кута нахилу, який дорівнює коефіцієнту тертя, визначити як відношення катетів прямокутного трикутника.

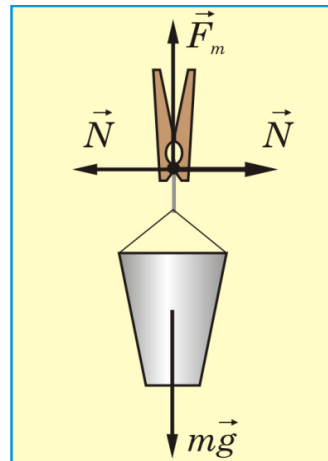


Рис. 3

Масу солі визначити як добуток густини на об'єм, який вона займає у стаканчику.

2. Визначити з максимальною точністю густину ρ соняшникової олії. Густина води $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Обладнання. Пробірка з наклеєною на зовнішню поверхню міліметровим папером, посудина для рідини, соняшникова олія, міліметровий папір для побудови графіків.

Розглянемо пробірку з наливою в неї рідиною густиною ρ , яка плаває в посудині з водою (рис. 4). Нехай внутрішня і зовнішня площі поперечного перерізу дорівнюють відповідно S_1 і S_2 . Позначимо через V_1 і V_2 внутрішній і зовнішній об'єми частин пробірки, які розташовані нижче певного рівня (AB), починаючи з якого площа поперечного перерізу пробірки змінюється. Запишемо умову рівноваги пробірки: $M g + \rho (S_1 l_1 + V_1) g = \rho_0 (S_2 l_2 + V_2) g$

де M – маса порожньої пробірки. Звідси отримаємо:

$$l_2 = \frac{\rho S_1}{\rho_0 S_2} \cdot l_1 + \frac{M + \rho V_1 - \rho_0 V_2}{\rho_0 S_2} = a \cdot l_1 + b \quad (1)$$

де a і b – деякі сталі, які не залежать від l_1 та l_2 .

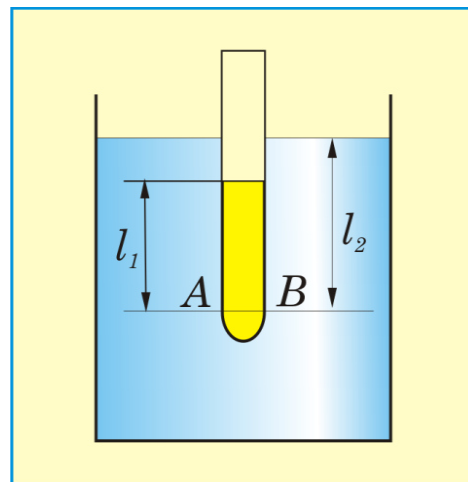


Рис. 4

Наллємо в пробірку воду і знімемо залежність l_2 від l_1 . Побудуємо на міліметровці відповідний графік. Як видно з формули (1), ця залежність лінійна. За кутовим коефіцієнтом визначимо відношення $\frac{S_1}{S_2}$: $a_0 = \frac{\rho_0 S_1}{\rho_0 S_2} = \frac{S_1}{S_2}$.

Повторимо експеримент, заповнюючи пробірку соняшниковою олією. Побудуємо графік залежності. За кутовим коефіцієнтом графіка обчислимо густину ρ олії:

$$a = \frac{\rho S_1}{\rho_0 S_2} = a_0 \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Остаточно отримуємо: $\rho = \frac{a}{a_0} \cdot \rho_0$.

11 клас

1. Визначити надлишковий тиск повітря в кульці (різниця тисків всередині кульки з атмосферним тиском), коли діаметр кульки в надутому стані дорівнює $d \approx 25$ см.

1) Знайдіть об'єм надutoї кульки та оцініть похибку вимірювання цієї величини.

2) Під час надування кульки разом з повітрям людина видихає в кульку пари води, які конденсуються на оболонці. Цей конденсат впливає на точність вимірювання. Як позбавитись у розрахунках цього впливу?

Примітка. Молярна маса повітря $\mu = 29$ г/моль, кімнатну температуру мають назвати члени оргкомітету.

Обладнання. Гумова повітряна кулька, нитки, ножиці, неоднорідний стержень (соломинка для коктейлів з пластиліном всередині), лінійка, штатив з лапкою, 2 аркуші паперу формату А4 (поверхнева густина паперу $\rho_n = 80$ г/м²).

Можливий розв'язок. Надуємо кульку до діаметра $d \approx 25$ см. Його можна визначити, якщо обернути нитку навколо кульки та виміряти довжину окружності $L = \pi \cdot d$. Зауважимо, що для різних перетинів значення будуть незначно відрізнятися, оскільки форма кульки неідеальна. Для більшої точності виміряємо діаметр кульки в трьох перпендикулярних площинах і підставимо в формулу $V = \pi d^3/6$ середнє значення d_{cp} . Похибка визначення діаметру можна оцінити з проведених вимірювань. Для об'єму вірне співвідношення $\Delta V/V = 3\Delta d/d_{cp}$.

Підвісимо соломинку за її центр мас. В якості важків будемо використовувати шматочки паперу, маса яких визначається їх площею (поверхнева густина паперу відома). З паперу робиться кошик для важків. Кошик і кулька кріпляться нитками.

Вимірювання проведемо в два етапи. Спочатку зрівноважимо важками надуту кульку. Для більшої точності плечі терезів варто вибирати максимально можливими. Виміряємо довжину плеча, на яке підвішена кулька l_1 .

На другому етапі зрівноважимо здуту кульку, залишивши масу важків такою самою і підвішуючи вантаж відомої маси m_0 на плече з кулькою. Нехай в рівновазі його плече дорівнює l_2 . Тоді момент, який створює новий тягарець, компенсує момент, створений вагою повітря в кульці $P \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2$.

Зауважимо, що першим робимо вимірювання з надutoю кулькою, оскільки під час надування на оболонці конденсуються пари води, що видихаються з повітрям і приводять до зміни маси кульки. Під час здування конденсат залишається на кульці.

Вага повітря в кульці дорівнює різниці сили тяжіння, що діє на нього, і сили Архімеда:

$$P = m g - V \rho_{атм} g = V \rho_{внутр} g - V \rho_{атм} g = m_0 \cdot l_2 / l_1,$$

де $\rho_{внутр}$ – густина повітря усередині кульки, а $\rho_{атм}$ – густина атмосферного повітря.

Надмірний тиск в кульці:

$$\Delta p = \frac{1}{V} \frac{m_0}{\mu} RT - p_{атм} = \frac{RT}{\mu} \rho_{внутр} - \rho_{атм} = \frac{\Delta m_0 l_2}{\mu V l_1} RT = (2,5 \pm 0,5) \text{ кПа}.$$

2. Визначити з максимальною точністю густину ρ соняшникової олії. Густина води $\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Обладнання. Пробірка з наклеєною на зовнішню поверхню міліметровим папером, посудина для рідини, соняшникова олія, міліметровий папір для побудови графіків.

Розглянемо пробірку з наливою в неї рідиною густиною ρ , яка плаває в посудині з водою (рис. 5). Нехай внутрішня і зовнішня площі поперечного перерізу дорівнюють відповідно S_1 і S_2 . Позначимо через V_1 і V_2 внутрішній і зовнішній об'єми частин пробірки, які розташовані нижче певного рівня (AB), починаючи з якого площа поперечного перерізу пробірки змінюється. Запишемо умову рівноваги пробірки: $Mg + \rho(S_1 l_1 + V_1)g = \rho_в(S_2 l_2 + V_2)g$

де M – маса порожньої пробірки. Звідси отримаємо:

$$l_2 = \frac{\rho S_1}{\rho_в S_2} \cdot l_1 + \frac{M + \rho V_1 - \rho_в V_2}{\rho_в S_2} = a \cdot l_1 + b \quad (1)$$

де a і b – деякі сталі, які не залежать від l_1 та l_2 .

Наллємо в пробірку воду і знімемо залежність l_2 від l_1 . Побудуємо на міліметровці відповідний графік. Як видно з формули (1), ця залежність лінійна. За кутовим коефіцієнтом визначимо відношення $\frac{S_1}{S_2}$:

$$a_0 = \frac{\rho_в S_1}{\rho_в S_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Повторимо експеримент, заповнюючи пробірку соняшниковою олією. Побудуємо графік залежності. За кутовим коефіцієнтом графіка обчислимо густину ρ олії:

$$a = \frac{\rho S_1}{\rho_в S_2} = a_0 \frac{\rho}{\rho_в}.$$

Остаточно отримуємо:

$$\rho = \frac{a}{a_0} \cdot \rho_0.$$

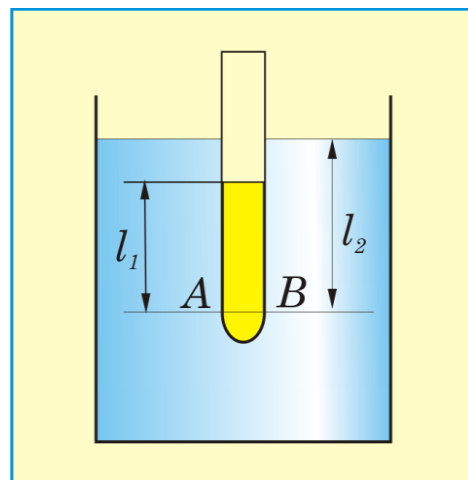


Рис. 5